Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 50, No. 3, 69-89, 2016

引渡しラグ下の投資決定と安定性*

中島　　巖**

＜要約＞

市場に齟齬をきたす，すなわち需要と供給の不一致をもたらす要因として，価格の一時的非弾力性，需要の不確実性，そして，生産ラグが指摘されてきたごとくである。生産ラグのうち，とりわけ，引渡しラグ，すなわち，商品の発注と納入の間の時間差の存在は，それが価格に反映されるところでは，時間差のばらつきは価格のばらつきを意味し，それは，価格変動を嫌う消費者ないし需要者にとって商品の有効性自体の低下と同義となる。

しかるに，資本財に関する引渡しラグは，資本設備の発注，その納入，設置，さらに操作等に関する労働者の教育を経て稼動化され，資本として生産に寄与し始めるまでの時間差を表わし，資本財市場の際立った特徴を構成する。かかる資本財に関する引渡しラグについては，生産現場の経験を経た実証作業の蓄積が先行し，1970年代に入って漸く理論的対応が試みられるに至った。

以下では，引渡しラグを含む問題の動学性を考慮し，ラグをともなう制御変数をもつ最適化問題に対する最適制御の手法の適用可能性をまず確認する。

次いで，引渡しラグに直面する企業の資本財に対する投資決定に際し，投資計画作成にともなう計画費用と設置，教育にともなう設置費用とから成る投資の調整費用の概念を導入し，一定のラグ期間の下での投資，資本ストックの最適時間経路を導く。

最後に，上の均衡時間経路が定常解に収束する鞍点安定性をもつことが確かめられる。さらに，ラグ期間をパラメータとみなすとき，ラグの拡大は定常解を中心として均衡時間経路を反時計周りに回転させることが確かめられる。また，ラグの拡大が均衡体系の定常解にHopf分岐をもたらす可能性が例示される。

JEL区分：D24，D92
キーワード：引渡しラグ，調整費用，鞍点安定性

＊本稿においては，分布ラグ（distributed lags）は，議論の外に置かれていることを予め断っておく。
＊＊専修大学名誉教授

序

静態的新古典派企業理論は，企業の投資決定が有限に留まる現実に対し合理的説明を提供し得ていないとする指摘に対し，1970年に入ると企業の最適化過程に調整費用（adjustment costs）の導入を以って対処する試みが一方でなされた。それは，資本財の買手が経験する注文から納品までの時間差，すなわち引渡しラグ（delivery lags）の存在に対し調整を迫られる経験に根差している。（資本財市場における引渡しラグに関する初期の議論として，Thalberg［31］，Mayer［26］，Almon［1］等参照。）

本来的に，投資活動は動的それであり，資本財需要に際しての引渡しラグの存在と，そこから発する調整費用負担の必然化を伴なう投資決定の問題は，動的時間視野の中で展開されなければならない。ラグを伴なう動的問題に，変分法（calculus of variation）と最適制御（optimal control）の手法を適用した Hughes［19］の議論を Maccini［24］，［25］は引渡しラグをともなう投資決定に援用した。

ところで，近年に至って，動的問題におけるパラメータの変化がその均衡体系の定常解にカオス的行動（chaotic behavior）を誘発させる可能性を解明すべく，カオス理論（chaos theory）の動的経済問題への適用化が盛んに試みられている。Chiarella［8］は，生産と生産物価格に対する期待形成とにラグがともなうところで市場均衡に「くもの巣型カオス」（cobweb chaos）が発生する可能性を指摘した。そこでは，投資決定の過程は考慮されていないことは言うまでもない。

我々の本稿の目的は，引渡しラグが存在するところでの投資決定の動学をみることにある。次節で，ラグの存在する動的体系に対する最適制御の手法の適用可能性を確かめた後に，第2節では，Maccini の指摘にしたがって，引渡しラグが存在し，そこからしたがう調整費用負担を負う企業の投資決定に対し最適制御の手法を適用し，投資と資本ストックが構成する均衡体系のあり方をみる。

第3節では，上の均衡体系の安定性をみる。まず，均衡体系の定常解が鞍点安定的（saddle-point stable）であること，さらに，パラメータとしての引渡しラグの拡大が，安定多様体に鞍点安定均衡を中心とする反時計回りの回転を与える可能性を確かめる。さらに，引渡しラグにともなう調整費用が引渡しラグ期間と資本財注文高の2乗との積で与えられる計画費用のみに限定されるとき，パラメータとしての引渡しラグの拡大が，均衡体系の定常解に Hopf 分岐（Hopf bifurcation）をもたらす可能性をみる。

最後に，結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第1節　　ラグと最適制御——予備的考察

本節では，制御問題において，状態変数と制御変数の間に反応ラグが存在する情況に対する最適制御の手法の適用性をみる。[1)]

動的情況を1階の差分方程式ないし微分方程式の体系として表現する際に，ダイナミック・ダイ

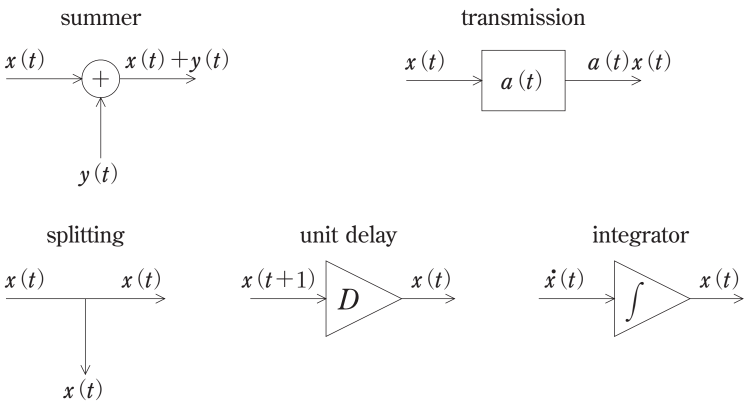

図-1

ヤグラム（dynamic diagrams）の工夫を用いることが有効である。線型体系の場合，５つの基本構成要素から構築される同ダイヤグラムは，まるでスカラー値が線に沿って走るそれと解することができる。

５つの基本要素は，加算子（summer），伝達子（transmission），分解子（splitter），単位遅延子（unit delay），そして，積分子（integrator）を含む。とりわけ，単位遅延子は，あらゆる入力を１単位（１期）だけ遅延させ，次期の出力とする働きをもつ。（**図-1**参照。）

いま，１階の差分方程式体系を，

$$x(t+1)=a(t)x(t)+b(t)u(t) \tag{1}$$

で表わそう。加算子は，$a(t)x(t)$と$b(t)u(t)$の間に入り両者を加算する。加算された値は，１期後に$x(t+1)$としてダイヤグラムの出力として現われる。

対応する連続時間体系は，

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+b(t)u(t) \tag{2}$$

で表わされる。（**図-2(a)，2(b)**参照。）

ところで，企業の新規の資本設備への投資決定は，設備の発注，納入，設置，そして試験といった過程を経た後に初めて新戦力としての生産能力となる。かかる状況は，最適制御の手法の適用に際しては，即時反応がしたがう体系の場合ほど容易ではない。したがって，かかる遅延反応問題を即時反応問題としてモデル化することも少なくない。以下では，遅延反応を含む問題の最適制御のための必要条件の導出を確認しておくことにする。[2)]

いま，制御問題

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt \tag{3}$$

$$s.t.\quad \dot{x}=g(t, x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) \tag{4}$$

$$x(t)=x_0 \quad \text{for } t_0-\tau \leq t \leq t_0 \tag{5}$$

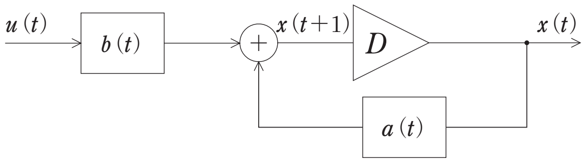

図-2(a)

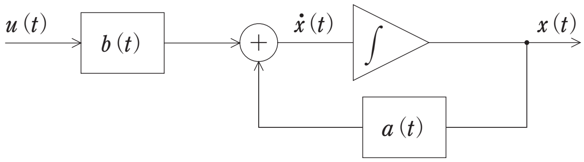

図-2(b)

$$u(t) = u_0 \quad \text{for } t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \tag{6}$$

$$x(t_1) \quad \text{free} \tag{7}$$

を考える。このとき，目的函数には$x(t)$, $u(t)$の同時制御変数のみが入り，状態変数$x(t)$の変化率$\dot{x}$はτ期間(一定)だけ遅れて$x(t-\tau)$, $u(t-\tau)$の値にも影響される。さらに，状態変数，制御変数の値は，t_0時点よりτだけ遡る時点の間は一定値$x(t) = x_0$, $u(t) = u_0$をとり，制御問題は，t_0時点から開始される。

さて，$\lambda(t)$を連続微分可能な$t\,(t_0 < t < t_1)$の函数とすれば，上の(4), (5), (6)式が満たされるところで

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [\, f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)\,(g(t), x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau))$$
$$+ \dot{x}(t)\,]\,dt \tag{8}$$

がしたがう。ただし，$\lambda(t)$は，(6)式が満たされるところで，$\lambda(t) = 0$とならなければならない。ここで，(8)式の右辺最終項に部分積分を施せば

$$-\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}(t)\,dt = -\lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{\lambda}(t)\,dt \tag{9}$$

を得る。

次いで，(9)式を(8)式に代入すれば，

$$-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [\, f(t, x(t), u(t)]$$
$$+ \lambda(t)\,[g(t, x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau)) + x(t)\dot{\lambda}(t)\,]\,dt$$
$$-\lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) \tag{10}$$

がしたがう。

ここで，１次変分（first variation）を定義しよう。

いま，問題

$$\max\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt \tag{11}$$

$$s.t.\quad \dot{x}(t)=g(t,x,u) \tag{12}$$

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\ t_0, t_1\quad \text{fixed} \tag{13}$$

を想起し，(11)式の最大値をJ^*で表わせば

$$\begin{aligned} J-J^*=\Delta J=\int_{t_0}^{t_1}[&f(t,x,u)+\lambda g(t,x,u)+x\dot{\lambda}\\ &-f(t,x^*,u^*)-\lambda g(t,x^*,u^*)-x^*\dot{\lambda}]\,dt \end{aligned} \tag{14}$$

がしたがう。(14)式を(t,x^*,u^*)の周りに Taylor 展開すれば，

$$\Delta J=\int_{t_0}^{t_1}[(f_x+\lambda g_x+\dot{\lambda})(x-x^*)+(f_u+\lambda g_u)(u-u^*)]\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\text{h.o.t.} \tag{15}$$

がしたがう。ただし，右辺最終項は，高次項を表わす。また，f, g の偏微係数は(t,x^*,u^*)に沿って評価される。

ここで，

$$\delta x=x-x^*,\quad \delta u=u-u^* \tag{16}$$

と定義する。このとき，ΔJ の $\delta x, \delta u$ に関して線型を成す部分は，

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_1}[(f_x+\lambda g_x+\dot{\lambda})\delta x+(f_u+\lambda g_u)\delta u]\,dt \tag{17}$$

で表わされ，J の第１変分（first variation）と呼ばれる。

さて，上の遅延（delay）を含む我々の問題((3)–(7)式)に関する第１変分を求めれば，

$$\begin{aligned} \delta J=\int_{t_0}^{t_1}&[\partial f/\partial x_t+\lambda\partial g/\partial x_t+\dot{\lambda})\delta x_t+(\lambda\partial g/\partial x_{t-\tau})\delta x_{t-\tau}\\ &+(\partial f/\partial u_t+\lambda\partial g/\partial u_t)\delta u_t+(\lambda\partial g/\partial u_{t-\tau})\delta u_{t-\tau}]\,dt+\lambda(t_1)\delta x(t_1) \end{aligned} \tag{18}$$

がしたがう。

さらに，$s=t-\tau$，したがって $t=s+\tau$ と設定すれば

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\lambda(t)[\partial g(t,x(t),x(t-\tau),u(t),u(t-\tau))/\partial x_{t-\tau}]\delta x_{t-\tau}(t)\,dt\\ &=\int_{t_0-\tau}^{t_1-\tau}\lambda(s+\tau)[\partial g(s+\tau,x(s+\tau),x(s),u(s+\tau),u(s))/\partial x_{t-\tau}]\delta x_{t-\tau}(s+\tau)\,ds \end{aligned} \tag{19}$$

がしたがう。$\delta u_{t-\tau}$ を含む項についても同様の議論が妥当する。しかるに，t_0 以前の時点において x_t, u_t は一定であるから，$x_{t-\tau}, u_{t-\tau}$ は t_0 以前の時点において一定となり，したがって，$t<t_0+\tau$ なる τ について $\delta x_{t-\tau}=\delta u_{t-\tau}=0$ となるから，(19)式の積分の下限を変更した上で(19)式を(18)式に代入し，$\delta u_{t-\tau}$ を含む項にも同様の手続きを適用すれば

$$\int_{t_0}^{t_1-\tau}\{[\partial f/\partial x_t+\lambda\partial g/\partial x_t+\dot{\lambda}+(\lambda\partial g/\partial x_{t-\tau})|_{t+\tau}]\delta x_t$$

$$+[\partial f/\partial u_t+\lambda\partial g/\partial u_t+\lambda\partial g/\partial u_{t-\tau})|_{t+\tau}]\delta u_t\}\,dt$$

$$+\int_{t_1-\tau}^{t_1}[\partial f/\partial x_t+\lambda\partial g/\partial x_t+\dot{\lambda})\delta x_t$$

$$+(\partial f/\partial u_t+\lambda\partial g/\partial u_t)\delta u_t]\,dt+\lambda(t_1)\delta x(t_1) \tag{20}$$

を得る。ただし，$\lambda\partial g/\partial x_{t-\tau}, \lambda\partial g/\partial u_{t-\tau}$ は，時点 $t+\tau$ で評価される。さらに，$\delta u_{t-\tau}, \delta x_{t-\tau}$ は，時間視野 t_1を越えるところで発生するから(20)式の 2 番目の積分には現われてこない。

ところで，もし，x^*, u^*が上の(3)-(7)式に対し最適を与えるならば，x^*, u^*, λ が同時に(4)-(7)式を満たし，かつ δx_t，δu_t の係数をゼロとするような函数 λ が存在する。さらに，最終時点 t_1が固定されている場合には，そのこと自体が横断面条件の役目を果たすことになり，改めて必要条件に含める必要はない。

以上から，必要条件

$$\dot{\lambda}=-\partial f/\partial x_t-\lambda\partial g/\partial x_t-(\lambda\partial g/\partial x_{t-\tau})|_{t+\tau}, \qquad t_0\leq t\leq t_1-\tau \tag{21}$$

$$\partial f/\partial u_t+\lambda\partial g/\partial u_t+(\lambda\partial g/\partial u_{t-\tau})|_{t+\tau}=0, \qquad t_0\leq t\leq t_1-\tau \tag{22}$$

$$\dot{\lambda}=-\partial f/\partial x_t-\lambda\partial g/\partial x_t, \qquad t_1-\tau\leq t\leq t_1 \tag{23}$$

$$\partial f/\partial u_t+\lambda\partial g/\partial u_t=0, \qquad t_1-\tau\leq t\leq t_1 \tag{24}$$

$$\lambda(t_1)=0 \tag{25}$$

がしたがう。しかるに，(25)式は，横断面条件を与える。

ここで，Hamilton 函数

$$H(t, x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\tau), \lambda(t))$$

$$=f(t, x_t, u_t)+\lambda_t g(t, x_t, x_{t-\tau}, u_t, u_{t-\tau}) \tag{26}$$

を定義すれば，最適制御の手法は，直ちに，必要条件

$$\dot{\lambda}=-\partial H/\partial x_t-\partial H/\partial x_{t-\tau}|_{t+\tau}, \qquad t_0\leq t\leq t_1-\tau \tag{27}$$

$$\partial H/\partial u_t+\partial H/\partial u_{t-\tau}|_{t+\tau}=0, \qquad t_0\leq t\leq t_1-\tau \tag{28}$$

$$\dot{\lambda}=-\partial H/\partial x_t, \qquad t_1-\tau\leq t\leq t_1 \tag{29}$$

$$\partial H/\partial u_t=0, \qquad t_1-\tau\leq t\leq t_1 \tag{30}$$

を与える。しかるに，(27)，(29)式から明らかなごとく，遅延反応の存在が必要条件に$\partial H/\partial x_{t-\tau}|_{t+\tau}$，$\partial H/\partial u_{t-\tau}|_{t+\tau}$の項を付加させる。もし，ラグ付き変数が Hamilton 函数の要素でなければ，その偏微係数はゼロとなり，即時反応の場合の必要条件に帰着する。

上の必要条件は，任意時点tにおける制御のわずかな変化の全体的影響力が最適プログラムにおいてはゼロでなければならず，t時点に同時的に実行される$(\partial H/\partial u_t)$部分とラグ付き変数として$\tau$期後に現われる$(\partial H/\partial u_{t-\tau}|_{t+\tau})$部分とから成ることを示唆している。

1）例えば，Luenberger［23］（p. 98）参照。
2）以下の議論として，Budelis＝Bryson, Jr.［6］，De Bont［9］，El–Hodiri＝Loehman＝Whinston［12］，Mann［28］, Hughes［19］, Kamien＝Muller［20］, Kamien＝Schwartz［21］等参照。

第2節　引渡しラグと投資決定

本節では，生産要素としての資本財の需要に際して，注文の発注と納品，そして稼動化との間に時間差，すなわち引渡しラグが存在するところでの企業の投資需要のあり方をみる。

動的経済環境の下での競争的企業の最適投資決定の議論において完全可変的な要素として労働（labor）が導入されてきた事実に対する反省として，可変性の点で労働と資本（capital）の間に大差はないとして調整費用（adjustment costs）の概念の導入が図られた。新古典派企業モデルが投資需要，したがって資本需要における有限性に対する有効な説明を提供し得ていないとする批判に答えるべく，資本財買手が自らの資本ストック量の調整に際して経験する遅れ（delay）を説明するために調整費用が導入されたごとくである。[3]とりわけ，資本財発注から納品後の設置，稼動開始までの時間（lead time）がもたらす時間差，すなわち引渡しラグ（delivery lags）の存在は資本財市場の顕著な特徴であるとみなされるに至った。[4]

かかる調整費用の導入の作業は動的最適化の文脈の中で展開される筈のものであり，最適制御論（optimal control theory）の手法の適用が促されてくる。[5]このとき，当期の資本と労働の投入水準によって影響されない型の分離可能調整費用（separable adjustment costs）の想定がなされたが，資本，労働の投入水準が準固定要素（quasi–fixed factors）を調整する際の費用に影響を及ぼし，したがって雇用，資本ストック，投資量が同時決定される型の分離不能調整費用（nonseparable adjustment costs）も想定され得る。後者は，競争モデルとの整合性の点でより高いそれとなる利点をもつ。

Nerlove［29］は，分離不能型の調整費用が存在するところでの企業の投資，労働の最適経路を導く過程をスケッチした。Maccini［24］,［25］は，分離可能型の調整費用の下での企業の投資，資本の最適経路のあり方を検討した。以下では，Maccini［24］,［25］の示唆に拠りながら，引渡しラグ下の分離可能型調整費用の下で最適な投資，資本経路のあり方を検討する。[7]

さて，生産物価格，賃金率，資本財価格を所与とする競争的企業を想定する。企業の資本ストックは，資本蓄積方程式（accumulation equation）

$$\dot{K}(t)=I(t) \tag{31}$$

で表わされるものとする。ただし，引渡しラグが存在するところでは，t 期における資本ストック変化率が，t 期以前に注文された資本財が t 期に納品され稼動開始する資本財ストックに等しいことを(31)式は示唆している。

いま，企業は，自らのコントロールの外にある τ 期の引渡しラグに直面するものとすると，t 期($t-\tau$ 期)の発注分は，τ 期後の $t+\tau$ 期(t 期)に納品，稼動開始することになる。すなわち，

$$D(t)=I(t+\tau) \tag{32}$$

$$\text{or} \quad D(t-\tau)=I(t) \tag{33}$$

がしたがう。ただし，$D(\cdot)$は，発注量のフローを表わす。このとき，企業が時点ゼロに投資計画 $K_0(t)$を決定した後，引渡しラグ期間中は，資本財ストックが変化しない，すなわち

$$K(t)=K_0(t), \quad 0\leq t\leq\tau \tag{34}$$

がしたがう。

ここで，企業は静的期待（static expectations）の下での利子率 r で資本市場で貸借し得るものとすれば，企業の純キャッシュ・フローの利子率 r による割引現在価値は，

$$V=\int_0^\infty \pi(t)e^{-rt}dt \tag{35}$$

で表わされる。ただし，純キャッシュ・フロー $\pi(t)$は，t 期に購入された資本財購入額と労働費用の和を生産物売上額から減じた値に等しく，

$$\pi(t)=pQ(t)-wL(t)-q_\tau I(t) \tag{36}$$

で表わされる。ただし，p は生産物価格，w は賃金率，q_τ は，資本財の引渡し価格であり，いずれも，企業にとって所与であるものとする。さらに，$Q(t)$は，産出量ないし販売量である。しかるに，引渡し価格 q_τ は，τ 期間の引渡しラグが支配するところで先渡し価格（forward price）である。すなわち，q_τ は，τ 期間後に引渡される資本財の価格である。これに対し，即座に引渡しがなされる資本財の価格は直物価格（spot price）である。ここで，引渡しラグと引渡し価格の間の関係を明確化するために先渡し価格としての引渡し価格を引渡しラグと直物価格のタームで表わそう。すなわち，発注時点ゼロにおける直物価格 q_0 と先渡し価格である引渡し価格 q_τ の間に

$$q_\tau=\alpha(\tau)q_0 \tag{37}$$

なる関係がしたがうものとする。このとき，$\alpha(\tau)$は，引渡しラグの期間の長短に依存し，直物価格に比例的に作用する係数を表わす。いま，$\alpha(0)=1$ と設定すると，３つの場合

$$\text{(i)} \quad 0<\alpha(\tau)<1, \quad \alpha'(\tau)<0 \tag{38}$$

$$\text{(ii)} \quad 1<\alpha(\tau)<\infty, \quad \alpha'(\tau)>0 \tag{39}$$

$$\text{(iii)} \quad \alpha(\tau)=1, \quad \alpha'(\tau)=0 \tag{40}$$

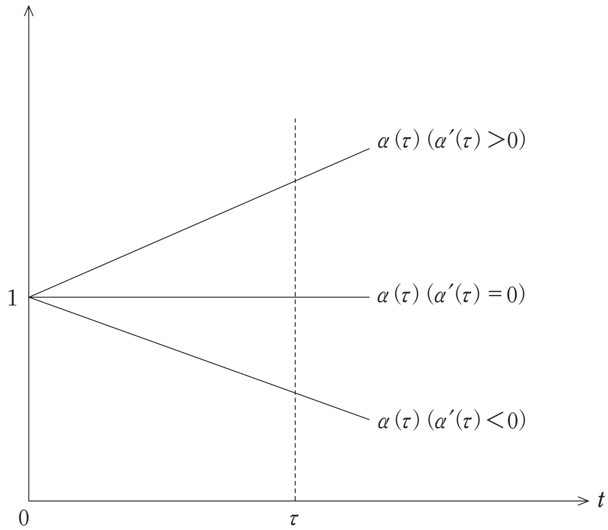

図-3

が想定し得る。(**図-3**参照。) (38)-(40)式は，資本財の供給者ないし生産者が先渡し価格と直物価格の差を引渡しラグの限界便益と限界費用の差にいかに反映させるかの行動様式を示唆している。

ところで，資本財供給者ないし生産者にとって，引渡しラグの長期化は，保管費，利子負担，保険費用等の上昇を招く反面，生産に際しての融通性（flexibility）の増加にともなう費用削減に寄与する可能性がある。このとき，費用削減幅が前者の費用負担上昇幅を上回る(下回る)ならば，先渡し価格は直物価格より低く(高く)なり，上の(ii)((i))の場合が対応する。両者の変動幅が一致するとき，$\alpha(\tau)=1$となり，先渡し価格は直物価格に一致し，(iii)の場合に対応する。

さて，引渡しラグが支配するところで調整費用が発生する可能性をみてみよう。

まず，新規の資本財購入に際して，市場調査，計画策定等の活動が招く産出ロスのタームでの費用負担を$P(D(t))$で表わす。これを計画費用（planning costs）と呼び，$P'(D(t))\geq 0$を仮定する。購入資本財の規模に依存し，非減少的であることを意味する。

次に，発注資本財が納入された後，生産工程への設置，操作方法周知のための労働者の訓練･教育（break-in）等の活動が招く費用負担を$B(I(t))$で表わし，設置費用（installation costs）と呼び，$B'(I(t))\geq 0$を仮定する。納入された資本財の規模に依存し，非減少的であることを意味する。

かかる計画費用と設置費用の和は調整費用$A(D(t), I(t))$を構成する。すなわち

$$A(D(t), I(t))=P(D(t))+B(I(t)) \tag{41}$$

と定義される。

さて，ここで，企業の生産過程を特定しよう。

企業は，資本と労働から1種類の生産物を生産函数

$$Q(t)=F(K(t), L(t)) \tag{42}$$

にしたがって生産するものとする。ただし，生産関数 F は，$F_K, F_L > 0$，$F_{KK}, F_{LL} < 0$，$F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2 > 0$ を満たすものとし，さらに，$\lim_{L\to\infty} F_L = 0, \lim_{L\to 0} F_L = \infty$；$\lim_{K\to\infty} F_K = 0, \lim_{K\to 0} F_K = \infty$ と仮定される。すなわち，生産関数は凹函数の形状をもつものとされる。

いま，τ 期間の引渡しラグが存在し，それにともなう分離可能型の調整費用を負担するものとする。このとき，企業は，純キャッシュ･フローの割引現在価値を最大化するような労働投入量，投資量，資本ストックの時間経路を選択するものとする。すなわち，企業の問題は，

$$V = \int_0^\infty \{pF(K(t), L(t)) - pP(D(t)) - pB(I(t)) - wL(t) - q_\tau I(t)\} e^{-rt} dt \tag{43}$$

$$s.t. \quad \dot{K}(t) = I(t) \tag{44}$$

$$K(t) = K_0, \qquad 0 \leq t \leq \tau \tag{45}$$

$$q_\tau = \alpha(\tau) q_0 \tag{46}$$

で表わされる。

しかるに，引渡しラグ τ が存在するところで $D(t) = I(t+\tau)$ ((32)式) なる関係がしたがうことを想起すれば，前節でみたごとく，$I(t+\tau)$ が決定変数に含められる必要がある。したがって，ここで，時間間隔の表現を修正することによって，$D(t) = I(t+\tau)$ を $I(t)$ のタームで表現し直すことにしよう。

いま，$t+\tau = s$ と設定すれば，

$$\int_0^\infty pP(I(t+\tau)) e^{-rt} dt = \int_\tau^\infty pP(I(s)) e^{-r(s-\tau)} ds \tag{47}$$

がしたがう。ここで，記号法を統一すれば，(47)式の右辺は，さらに，

$$\int_\tau^\infty pP(I(s)) e^{-r(s-\tau)} ds = \int_\tau^\infty pP(I(t)) e^{-r(t-\tau)} dt \tag{48}$$

と表現される。したがって，(48)式を(43)式に代入すれば，(43)式は，

$$\begin{aligned} V = &\int_\tau^\infty \{pF(K(t), L(t)) - pP(I(t)) e^{r\tau} - pB(I(t)) - wL(t) - q_\tau I(t))\} e^{-rt} dt \\ &+ \int_0^\tau \{pF(K(t), L(t)) - pB(I(t)) - wL(t) - q_\tau I(t)\} e^{-rt} dt \end{aligned} \tag{49}$$

と表現し直される。しかるに，(49)式の右辺第 2 項において，区間 $0 \leq t \leq \tau$ の間における企業の資本ストックの時間経路は，新規投資計画以前に発注された分から与えられ，この間の決定変数は，労働投入量のみに限定される。

いま，労働投入量に関する最大化を実行すれば，最適条件

$$F_L(K(t), L(t)) = \frac{w}{p} \tag{50}$$

がしたがう。さらに，(50)式を逆函数を用いて最適投入量について解けば，

$$L(t)=\hat{L}\left(\frac{w}{p},K(t)\right) \tag{51}$$

がしたがう。ここで，(51)式を(49)式の第 2 積分項に代入すれば，

$$\bar{V}=\int_0^{\infty}\{pF(K(t)),\hat{L}\left(\frac{w}{p},K(t)\right)-pB(I(t))-w\hat{L}\left(\frac{w}{p},K(t)\right)-q_{\tau}I(t)\}e^{-rt}dt \tag{52}$$

を得る。以上から，企業の最適化の問題は，上の最大不変量$\bar{V}$ を減じた $V-\bar{V}$ の最大化の問題に帰着する。企業の問題は，制約条件(44)-(46)式の下で

$$V-\bar{V}=\int_{\tau}^{\infty}\{pF(K(t),L(t))-pP(I(t))e^{-r\tau}-pB(I(t))-wL(t)-q_{\tau}I(t)\}e^{-rt}dt \tag{53}$$

の最大化のそれと表現し直される。以下で，時間要素 t を省略すれば，現在価値 Hamilton 函数

$$H=p(K,L)-pP(I)e^{r\tau}-pB(I)-wL-\alpha(\tau)q_0I+\lambda I\}e^{-rt} \tag{54}$$

がしたがう。このとき，状態変数は K, 制御変数は L,I となる。また，$\lambda(t)$は，資本ストックのシャドー価格を表わし，Lagrange 乗数の役割をもつ。

直ちに，最適条件

$$\frac{\partial H}{\partial L}=pF_L(K,L)-w=0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial H}{\partial I}=pP'(I)e^{-r\tau}-pB'(I)-\alpha(\tau)q_0+\lambda=0 \tag{56}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial K}=-pF_K(K,L)+r\lambda \tag{57}$$

$$\dot{K}=I \tag{58}$$

$$\lim_{t\to\infty}\lambda e^{-rt}=0 \tag{59}$$

$$K(t)=K_0(t),\qquad 0\leq t\leq\tau \tag{60}$$

がしたがう。(56)式は，資本のシャドー価格が限界費用，すなわち限界計画費用と限界設置費用の和から成る限界調整費用と引渡し価格との和に均等化しなければならないことを意味している。しかるに，限界計画費用 $P'(I)e^{r\tau}$ には，計画費用が資本財発注時に負担されなければならない点が考慮され複利因子（compound interest factor）が現われるのに対し，限界設置費用 $B'(I)$は，引渡し時点で評価されることが示唆される。

(59)式は，横断面条件（transversality condition）を表わし，投資の帰属価値が時間が無限大に近づくにつれゼロに近づいていくことを示唆している。ここで，(57)式を積分し，(59)式を考慮すれば，

$$\lambda(t)=\int_0^{\infty}pF_K(K(t),L(t))e^{-rt}dt=\int_t^{\infty}pF_K(K(t),L(t))e^{-r(s-\tau)}ds>0 \tag{61}$$

がしたがう。(61)式は，資本のシャドー価格，したがって，投資の限界費用が正の値をとり，資本

の将来限界生産力が現在価値と均等化しなければならないことを意味する。
いま，(55)式を L について解いて，

$$L(t)=\hat{L}\left(\frac{w}{p},K(t)\right) \tag{62}$$

がしたがうことを想起し，上の体系から $\lambda,\dot{\lambda}$ を消去しよう。
まず，(56)式から，

$$\dot{\lambda}(t)=P''(I(t))e^{r\tau}\dot{I}(t)+B''(I(t))\dot{I}(t) \tag{63}$$

を得る。(56), (57), (62)式から

$$\dot{I}(\tau)=\frac{r[\alpha(\tau)q_0+P'(I(t))e^{r\tau}+B'(I(t))]-pF_K\left[K(t),\hat{L}\left(\frac{w}{p},K(t)\right)\right]}{P''(I(t))e^{r\tau}+B''(I(t))} \tag{64}$$

を得る。したがって，(55)–(60)式の均衡体系は，(64)式と，

$$\dot{K}(t)=I(t) \tag{65}$$

との $I(t)$ と $K(t)$ に関する 2 つの微分方程式体系に帰着する。
節を改めて，上の均衡体系の定常解の安定性をみることにする。

3）調整費用について，Arrow［2］, Lucas［22］, Gould［14］, Treadway［32］,［33］等参照。
4）資本財市場の特性について，例えば，Deleeuw［10］, Thalberg［31］等参照。
5）例えば，Dorfman［11］, Arrow＝Kurz［3］, Halkin［15］等参照。
6）分離不能調整費用の投資理論への導入は Treadway［32］を嚆矢とする。経済成長論へのそれは，Uzawa［34］を嚆矢とする。
7）以下の議論の手続は，Maccini［24］,［25］, および Hughes［19］に負う。いずれも，変分法（calculus of variation）の適用をも念頭している。
8）先渡し価格の導入は，備蓄（storage）の可能性と不可分である。Brennan［5］, Telser［30］, Working［36］は，古くからの議論として参照されるべきであろう。

第3節　引渡しラグと投資決定の安定性

本節では，前節で導かれた引渡しラグを含む企業の投資決定の均衡体系の定常解の安定性をみる。[9)]
上の均衡体系の定常解 (I^*,K^*) は，(64), (65)式をゼロとする，すなわち $\dot{I}(t)=0,\dot{K}(t)=0$ を同時に満たす均衡点，すなわち

$$r[\alpha(\tau)q_0+P'(I(t))e^{r\tau}+B'(I(t))]-pF_K(K^*,\hat{L}\left(\frac{w}{p},K^*\right))=0 \tag{66}$$

$$I^* = 0 \tag{67}$$

を同時に満たす均衡点として定義される。

しかるに，定常解(I^*, K^*)の安定性をみる前に，調整費用を構成する計画費用関数Pと設置費用関数Bの形状を特定しておこう。

まず，計画費用関数について，$D(t)=0$に対し，

$$P(0) = P'(0) = 0 \tag{68}$$

がしたがい，$D(t) > 0$に対し

$$P'(D(t)) > 0,\ P''(D(t)) > 0 \tag{69}$$

がしたがうものと仮定する。同様に，設置費用関数について，$I(t)=0$に対し，

$$B(0) = B'(0) = 0 \tag{70}$$

がしたがい，$I(t) > 0$に対し

$$B'(I(t)) > 0,\ B''(I(t)) > 0 \tag{71}$$

がしたがうものと仮定する。

以上の調整費用関数に関する仮定の下で，定常解$(\dot{I}(t)=0, \dot{K}(t)=0)$を$K$–$I$座標に描くことにする。以下で，再び，時間要素$t$を省略するものとする。

まず，$\dot{I}=0$を満たす(66)式から

$$\left.\frac{\partial I}{\partial K}\right|_{\dot{I}=0} = \frac{p\left(F_{KK} + F_{KL}\dfrac{\partial \hat{L}}{\partial K}\right)}{r\left(P''(I)e^{r\tau} + B''(I)\right)} \tag{72}$$

がしたがう。しかるに，最適労働投入量が満たすべき最適条件

$$pF_L(K, L) = w \tag{73}$$

を想起し，最適労働投入量について

$$L = \hat{L}\left(\frac{w}{p}, K^*\right) \tag{74}$$

と解けば

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial K} = -\frac{F_{LK}}{F_{LL}} \tag{75}$$

がしたがう。ここで，(75)式を(72)式に代入すれば

$$\left.\frac{\partial I}{\partial K}\right|_{\dot{I}=0} = \frac{p\left(F_{KK}F_{LL} - F_{LK}^2\right)}{r\left(P''(I)e^{r\tau} + B''(I)\right)F_{LL}} < 0 \tag{76}$$

がしたがい，直ちに，負の符号を取ることが確かめられる。(76)式は，K–I座標において右下り

の曲線を描く。

次に，$\dot{K}=0$ は，K–I 座標における横軸で与えられる。

さて，上の均衡体系を定常解において線型近似すれば

$$\begin{pmatrix} \dot{I} \\ \dot{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(P''(I)e^{r\tau}+B''(I)) & -\dfrac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I-I^* \\ K-K^* \end{pmatrix} \tag{77}$$

がしたがう。上の線型化された定数値をもつ均衡体系の定常解の安定性をみるために，係数要素から成る Jacobian 行列 J

$$J = \begin{pmatrix} r(P''(t)e^{r\tau}+B''(I)) & -\dfrac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

を定義すれば，直ちに，

$$\mathrm{tr}(J) \equiv \lambda_1+\lambda_2 = r(P''(I)e^{r\tau}+B''(I))>0 \tag{79}$$

$$\det(J) \equiv \lambda_1\lambda_2 = \frac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}}<0 \tag{80}$$

がしたがう。ただし，λ_1, λ_2は，Jacobian 行列 J の特性方程式

$$|J-\lambda I|=0 \tag{81}$$

を解く特性根であり，(79), (80) 式の符号から，λ_1, λ_2が反対符号をもつことが示唆される。このことは，体系が鞍点安定的（saddle–point stable）となり，定常解 (I^*, K^*) に収束する安定多様体（stable manifold）をもつことを意味する。以上の関係は，**図–4**において示される。[10] 太線部が安定多様体となり，最適経路を構成する。

ところで，引渡しラグ τ をパラメータとみなすとき，τ の変化が体系の定常解にもたらす効果をみることは興味深い。

すでにみたごとく，上の均衡体系には所与の引渡しラグ τ に対して，一意の定常解が存在した。しかるに，引渡しラグ τ の様々な値に対し，定常解がいかなる変化をみせるかをみるために，(66) 式を想起すれば

$$\frac{\partial K}{\partial \tau} = \frac{r(a'(\tau)q_0+rP'(I)e^{r\tau})}{p(F_{KK}F_{LL}-F_{LK}^2)} \tag{82}$$

がしたがう。一般に，(82) 式の符号は確定しない。

ところで，上で導かれた最適経路を適用すれば，投資は資本ストックとモデルのパラメータ群の函数として表現し得る。いま，利子率 r，初期引渡し価格 q_0，賃金率 w を一定とするとき，引渡しラグ τ のみをパラメータとする

$$I(t) = I(K(t), \tau) \tag{83}$$

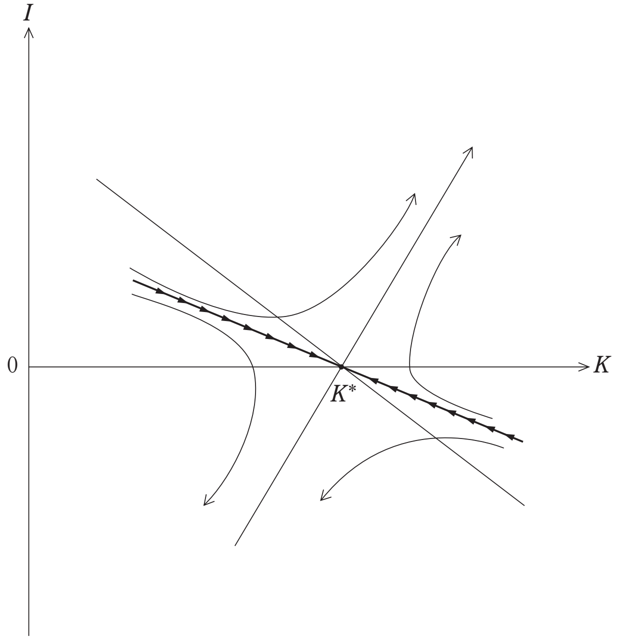

図-4

なる関係がしたがう。[11]

さて，(83)式の符号をみるために，２つの場合を想定してみよう。

まず，計画費用が無視し得る（negligible）な場合，すなわち，$P(D(t))\equiv 0$ がしたがう場合を想定する。いま，(62)式を想起すれば

$$\frac{\partial K^*}{\partial \tau}=\frac{r\alpha'(\tau)q_0F_{LL}}{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)} \tag{84}$$

がしたがうから，(84)式の符号は，$\alpha'(\tau)$ の符号に依存する。しかるに，

$$\alpha'(\tau)\gtreqless 0 \iff \frac{\partial K^*}{\partial \tau}\lesseqgtr 0 \tag{85}$$

がしたがう。いま，$\alpha'(\tau)<0$ と想定すると，τ の増加は元の曲線 $\dot{I}_1=0$ を右にシフトさせることを(85)式は意味している。このとき，新たな曲線 $\dot{I}_2=0$ が $I>0$ の領域で $\dot{I}_1=0$ 曲線と交わるとすれば，交点において

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial I}{\partial K}\right)}{\partial \tau}>0 \tag{86}$$

が満たされなくてはならない。しかるに，$\dfrac{\partial I}{\partial K}=\dfrac{\partial I}{\partial t}\Big/\dfrac{\partial K}{\partial t}=\dot{I}/\dot{K}=\dot{I}/I$ から，(64)式を(65)式で除し，τ に関して微分すれば，直ちに

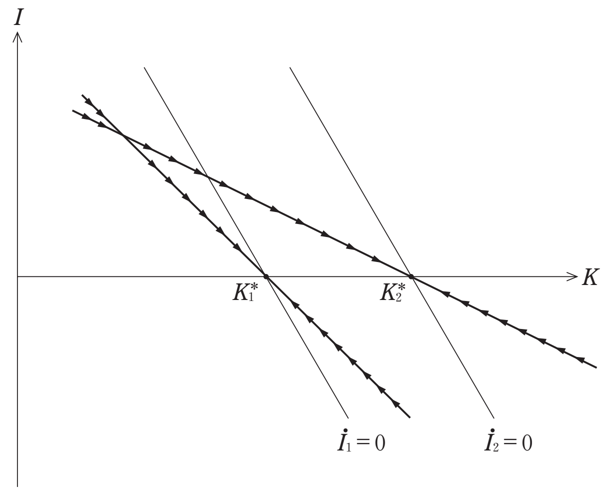

図-5

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial I}{\partial K}\right)}{\partial \tau}=\frac{r\alpha'(\tau)\,q_0}{IB''(I)}<0 \tag{87}$$

がしたがい，(86)式と矛盾する。同様の議論は，$I<0$の領域で交わる場合についても妥当し，したがって，$P(D(t))=0$，かつ$\alpha'(\tau)<0$の下で，引渡しラグτの増加(減小)は最適経路を一様（uniformily）に右(左）にシフトさせることが結論される。(**図-5**参照。[12])

次に，$\alpha(\tau)=1$の場合を想定する。$q_\tau=q_0=q$となり引渡し価格が一定となり，$\alpha'(\tau)=0$がしたがう。しかるに，上と同様の手続きを適用し，$\frac{\partial K}{\partial t}=\dot{K}=I$を考慮し，$t+\tau=s$，したがって$t=s-\tau$を想起し，$\frac{\partial I}{\partial \tau}=\frac{\partial I}{\partial K}\cdot\frac{\partial K}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \tau}=-I\frac{\partial I}{\partial K}$がしたがうことを考慮すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{\partial I}{\partial K}\right)}{\partial \tau}&=\frac{re^{r\tau}\left(rP'(I)+\frac{\partial I}{\partial \tau}P''(I)\right)}{(P''(I)e^{r\tau}+B''(I))I}\\&=\frac{re^{r\tau}\left(rP'(I)-I\frac{\partial I}{\partial K}P''(I)\right)}{(P''(I)e^{r\tau}+B''(I))I}>0\end{aligned} \tag{88}$$

がしたがい，(88)式は，正の符号を取ることが確かめられる。しかるに，資本財の引渡し価格が引渡しラグの変化に影響されないところでは，(84)式から$\frac{\partial K^*}{\partial \tau}=0$となり，一定の$K^*$を起点として均衡多様体が$\tau$の増加とともに反時計周りに回転することが帰結される。(**図-6**参照。[13])

ところで，上の想定の下では，パラメータとしてのラグ期間τの変化は，その増加が均衡多様体に反時計周りの回転を与えることでしかなかったことは，上で見たごとくである。しかるに，ラグ期間の拡大が体系にカオス的変動をもたらす可能性については，これまでに多くの指摘がある。Chiarella［8］は，生産物価格の予想形成に際して予想ラグ（expectations rags）が伴うところで，

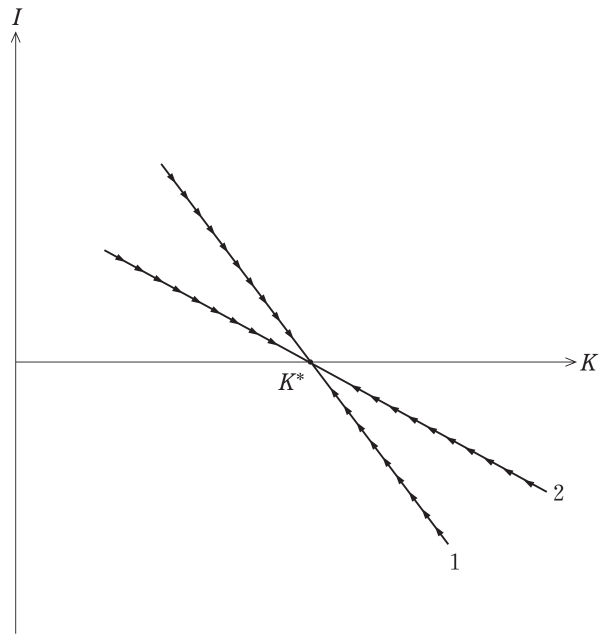

図-6

生産物市場均衡体系に平均ラグ時間（mean lag time）の変化がカオス的変動をもたらすことを主張する。しかるに，そこでの動学は，非線型の単調的供給函数と線型の需要曲線を想定するそれである。他方，Hommes［17］,［18］は，需要曲線，供給曲線が共に非線型であり，需要は期待価格に対する適応型（adaptive）のそれを想定し，カオス型変動の発生の可能性を導いた。そこでのカオスはいずれも，くもの巣型動学の援用からしたがう「くもの巣型カオス」（cobweb chaos）である。Chavas＝Holt［7］は，畜産産業において，生産ラグ（cattle production lags）が伴うところで，弾力性一定需要曲線（constant elasticity demand curve）の下で，くもの巣型カオスが生ずる可能性を導いた。[14)]

さて，以下で，上で想定された体系の下で，パラメータとしての引渡しラグの変化が定常解に Hopf 分岐（Hopf bifurcation）をもたらす可能性をみてみよう。

上で想定された生産構造自体を変更することなく調整費用のあり方に特定化を施すことにする。

いま，調整費用のうち，設置費用は無視し得る$(B(I(t),\tau)=0)$ものと想定する。残る計画費用は，資本財注文高の 2 乗の値とラグ期間の積の$\frac{1}{2}$の値で表わされるものとする。すなわち，調整費用函数は，

$$A(D(t),\tau)=P(D(t),\tau)=\frac{\tau(D(t))^2}{2} \tag{89}$$

の形をとる。このとき，注文高に関して，直ちに

$$P'(D(t))=\tau D(t) \tag{90}$$

$$P''(D(t))=\tau \tag{91}$$

がしたがう。ここで，引渡しラグ τ の下で，

$$D(t)=I(t+\tau) \tag{92}$$

がしたがうことを想起し，前節の(48)-(49)式の展開に際して適用された手続きを(92)式に適用すれば，修正された調整費用函数の下でしたがう均衡体系の定常解で評価された Jacobian 行列

$$J=\begin{pmatrix} r\tau e^{r\tau} & -\dfrac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

がしたがう。

いま，上の Jacobian 行列の固有値を求めるために，特性方程式を定義する。すなわち，

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |J-\lambda I| \\ &= \begin{vmatrix} r\tau e^{r\tau}-\lambda & -\dfrac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (r\tau e^{r\tau}-\lambda)(-\lambda)-\frac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}} \\ &= \lambda^2-(r\tau e^{r\tau})\lambda-\frac{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)}{F_{LL}} \\ &= \lambda^2-\mathrm{tr}(J)-\det(J)=0 \end{aligned} \tag{93}$$

がしたがう。

パラメータ値 $\tau=\tau^*$ のとき，ただ1つの不動点 (I^*,K^*) を体系がもつと仮定し，さらに，Jacobian 行列 J の行列式 $\det(J)$ が，存在し得るすべての不動点 (I,K,τ) に対しゼロでないものと仮定すると，パラメータ τ^* の近傍 $B_r(\tau^*)\in\boldsymbol{R}$ を考えるとき，陰函数定理から，$\tau\in B_r(\tau^*)$ に対して滑らかな函数 $I^*=I^*(\tau^*)$，$K^*=K^*(\tau^*)$ が存在する。すなわち，近傍内の任意の τ に対してただ1つの不動点 (I^*,K^*) が存在する。

しかるに，［Hopf 分岐定理］（Hopf bifurcation theorem）は，パラメータ τ の適当な値に対して不動点の近傍で閉軌道が存在することを主張する。[15)]

［Hopf 分岐定理］は，パラメータ τ に対する均衡値 $(I^*(\tau),K^*(\tau))$ が τ の滑らかな函数であるとき，

(i) 体系の特性方程式 $|J-\lambda I|=0$ は，$\tau=\tau^*$ において1組の純虚根 $\lambda(\tau^*)$ をもち，他に実数部分がゼロとなる根をもたない。

(ii) 固有値の実数部分 $Re\lambda(\tau)$ のパラメータ τ に関する微係数が，$\tau=\tau^*$ で評価されるときゼロとならない。

を要件とし，(ⅰ),(ⅱ)が満たされるとき，体系の均衡の定常解が安定化する直前あるいは直後に閉曲線が存在し続け，その閉曲線上を動く解が存在する現象，すなわち Hopf 分岐（Hopf bifurcation）が発生することを主張する。

さて，上の特性方程式を解けば，固有値

$$\lambda_{1,2}=\frac{r\tau e^{r\tau}\pm\sqrt{(r\tau e^{r\tau})^2+4p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)/F_{LL}}}{2} \tag{94}$$

がしたがう。

いま，$\tau^*=0$ で，(94)式を評価すると

$$\lambda_{1,2}(\tau^*)=\pm\sqrt{p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)/F_{LL}} \tag{95}$$

がしたがう。しかるに，$p(F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2)/F_{LL}<0$ であるから，$\tau^*=0$ において $\lambda_{1,2}(\tau^*)$ は純虚根となる。さらに，実数部分がゼロでない根は他に存在しない。このことは，Hopt 分岐定理の要件(ⅰ)が満たされたことを意味する。

次に，上の固有値の実数部分の微係数を $\tau^*=0$ で評価すれば，

$$\left.\frac{\partial Re\lambda(\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau^*=0}=r(1+r\tau)e^{r\tau}>0 \tag{96}$$

がしたがう。かかる帰結は，Hopf 分岐定理の要件(ⅱ)が満たされたことを意味する。

以上から，企業の投資決定に際して引渡しラグが存在し，そこでの調整費用が計画費用の負担のみにとどまり，それが資本財注文高の2乗と引渡しラグ τ との積の $\frac{1}{2}$ で表わされるところで，企業の均衡体系の定常解が $\tau^*=0$ を満たすとき $(I^*(\tau^*),K^*(\tau^*))$ の近傍に閉軌道が存在し得ることが帰結される。しかるに，上の帰結は，閉軌道の存在性を述べるだけのものであり，その安定性について何ら言及していないことに注意しよう。

9）本項の前半部における手続きの多くを Maccini［24］に負う。
10）Maccini, *op. cit.,* Figure 1 (p. 275) に準ずる。
11）予め設定された函数関係ではないことに注意されたい。
12）Maccini, *op. cit.,* Figure 2 (p. 277) に準ずる。
13）Maccini, *op. cit.,* Figure 3 (p. 278) に準ずる。
14）カオス的変動を生む可能性のあるその他の生産ラグの例として，Baumol＝Wolff［4］は，R&D支出と生産性の間のフィード･バック（feed back）の発生がカオスを導くとする。また，Feichtinger＝Kopel［13］は R&D 支出の決定権をもつ経営者の対リスク態度の変化が，また，Hibbert＝Wilkinson［16］は，広告支出の暖簾や市場に対するインパクトのあり方が，それぞれカオス的変動をもたらすと主張する。
15）［Hopf 分岐定理］に関して，例えば，Medio［27］, Vialar［35］等参照。

結びに代えて

古典的意味で，瞬時的に需要と供給が一致しない，すなわちクリアーし得ない市場が存在することも事実である。その要因として，市場での瞬時的価格硬直性，需要面での需要不確実性，そして供給面での生産不確実性が指摘されよう。

しかるに，生産不確実性を惹起させる最たる要因の１つは，生産ラグ（production lags）の存在である。二重価格化（peak load pricing），独占化（monopoly），企業間連携化（firm interaction），さらに垂直的統合化（vertical integration）が，かかる情況の下で促されてくる。いずれも，瞬時的生産調整不全に対処すべく生産者たる企業側が凝らしてきた制度的工夫であると考えられる。

資本財投資に際しての引渡しラグ（delivery lags），すなわち，資本財の発注から納品，設置，そして稼動開始までの時間差（lead time）の存在を生産ラグの一因とする観点から，引渡しラグに直面する競争的企業の投資決定のあり方をみてきた。

かかる引渡しラグの導入は，企業の意思決定を動的なそれとする。まず，ラグを伴なう変数を含む体系に対する最適制御（optimal control）の手法の適用可能性をみた上で，引渡しラグに直面する企業の投資決定の均衡体系のあり方をみ，次いで，その定常解の安定性をみた。

引渡しラグが要請する追加的費用負担，すなわち，調整費用のあり方が，その安定性を左右することが確かめられた。所定の引渡しラグ期間の下で，資本財注文高に関する逓増性を示す調整費用函数の下では，企業の均衡体系の定常解は，鞍点安定性を示すことが確かめられた。さらに，パラメータとみなされる引渡しラグ期間の変化は，定常解に至る経路の変更を伴なうものの，定常解そのもの位置には変更をもたらさないことが確かめられた。

上の調整費用が資本財注文高とラグ期間の積の $\frac{1}{2}$ の値で特定化されるところでは，パラメータとしてのラグ期間の拡大は，企業の均衡の定常解に Hopf 分岐をもたらし得ることが帰結された。

ラグ期間のランダム化の導入は，我々の議論の興味深い発展化の一つの方向であろう。

References

〔1〕 S. Almon, “The Distributed Lag between Capital Appropriations and Expenditures,” *Econometrica*, 33, 1965.

〔2〕 K. J. Arrow, “Optimal Capital Policy with Irreversible Investment,” in J. N. Wolfe, ed., *Value, Capital, and Growth*, Aldine Publishing Co., 1968.

〔3〕 ________, and M. Kurz, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, John Hopkins Press, 1970.

〔4〕 W. J. Baumol and E. N. Wolff, “Feedback between R&D and Productivity Growth : A Chaos Model,” in J. Benhabib, ed., *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press, 1992.

〔5〕 M. J. Brennan, “The Supply of Storage,” *American Economic Review*, 48, 1958.

〔6〕 J. J. Budelis and A. E. Bryson, Jr., “Some Optimal Control Results for Differential–Difference Systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15, 1970.

〔7〕 J–P. Chavas and M. T. Holt, “Market Instability and Nonlinear Dynamics,” *American Journal of Agricultural Economics*, 75, 1993.

〔8〕 C. Chiarella, “Cobweb Model : Its Stability and the Onset of Chaos,” *Economic Modelling*, 5, 1988.

〔9〕 R. R. De Bont, "Limit Pricing, Uncertain Entry, and the Entry Lag," *Econometrica*, 44, 1976.
〔10〕 T. Deleeuw, "The Demand for Capital Goods by Manufacturers : A Study of Quarterly Time Series," *Econometrica*, 30, 1962.
〔11〕 R. Dorfman, "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory," *American Economic Review*, 59, 1969.
〔12〕 M. E. El–Hodiri, E. Loehman and A. Whinston, "Optimal Investment with Time Lags," *Econometrica*, 40, 1972.
〔13〕 G. Feichtinger and M. Kopel, "Chaos in Nonlinear Dynamical Systems Exemplified by an R&D Model," *European Journal of Operational Research*, 68, 1993.
〔14〕 J. P. Gould, "Adjustment Costs in the Theory of the Firm," *Review of Economic Studies*, 35, 1968.
〔15〕 H. Halkin, "Necessary Conditions for Optimal Control Problem with Infinite Horizons," *Econometrica*, 42, 1974.
〔16〕 B. Hibbert and I. Wilkinson, "Chaos Theory and Dynamics of Marketing Systems," *Journal of the Academy of Marketing Science*, 22, 1994.
〔17〕 C. H. Hommes, "Dynamics of the Cobweb Model with Adaptive Expectations and Nonlinear Supply and Demand," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 24, 1994.
〔18〕 ________, "On the Consistency of Backwark–Looking Expectations : the Case of the Cobweb," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 33, 1998.
〔19〕 D. K. Hughes, "Variational and Optimal Control Problems with Delayed Arguments," *Journal of Optimization Theory and Its Applications*, 2, 1968.
〔20〕 M. I. Kamien and E. Muller, "Optimal Control with Integral State Equations," *Review of Economic Studies*, 43, 1976.
〔21〕 ________, and N. L. Schwartz, *Dynamic Optimization, the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North Holland, 1981.
〔22〕 R. E. Lucas, "Adjustment Costs and the Theory of Supply," *Journal of Political Economy*, 75, 1967.
〔23〕 D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems : Theory, Models and Applications*, John Wiley & Sons, 1979.
〔24〕 L. J. Maccini, "Delivery Lags and the Demand for Investment," *Review of Economic Studies*, 40, 1973.
〔25〕 ________, "On Optimal Delivery Lags," *Journal of Economic Theory*, 5, 1973.
〔26〕 T. Mayer, "Plant and Equipment Lead Times," *Journal of Business*, 33, 1969.
〔27〕 A. Medio, *Chaotic Dynamics : Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press, 1992.
〔28〕 D. H. Mann, "Optimal Theoretical Advertising Stock Models : A Generalization Incorporating the Effects of Delayed Response from Promotional Expenditure," *Management Science*, 21, 1975.
〔29〕 M. Nerlove, "Lags in Economic Behavior," *Econometrica*, 40, 1972.
〔30〕 L. G. Telser, "Futures Trading and the storage of Cotton and Wheat," *Journal of Political Economy*, 66, 1958.
〔31〕 B. Thalberg, "The Market for Investment Goods : An Analysis Where Time of Delivery Enters Explicitly," *Review of Economic Studies*, 27, 1960.
〔32〕 A. B. Treadway, "On Rational Entrepreneurial Behaviour and the Demand for Investment," *Review of Economic Studies*, 36, 1969.
〔33〕 ________, "Adjustment Costs and Variable Inputs in the Theory of the Competitive Firm," *Journal of Economic Theory*, 2, 1970.
〔34〕 H. Uzawa, "Time Preference and the Penrose Effect in a Two–Class Market of Economic Growth," *Journal of Political Economy*, 77, 1969.
〔35〕 T. Vialar, *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics*, Springer, 2009.
〔36〕 H. Working, "The Theory of the Price of Storage," *American Economic Review*, 39, 1949.