補遺：株式売買における統計的裁定のパフォーマンス[1)]

石 鎚 英 也 (専修大学ネットワーク情報学部)

Supplement : How Pairs Trading Works in the Japanese Stock Market

Hideya ISHIZUCHI (School of Network and Information, Senshu University)

This article is a supplement of the author's paper (Ishizuchi [2009]), and two relevant issues are reviewed. The first is on the performance indices of trade. In the paper, it is assumed we can use short selling with at most one-to-one leverage ratio, and trading performance is mainly measured by total return. Ratio of total selling price to total buying price is used as a performance index in the paper, but it is not necessarily consistent with total return because of the leverage constraint. The second is on portfolio selection. In the paper, a portfolio is composed according to the traditional mean-variance theory, while many traders supposedly see their growth of asset as a major matter. We will briefly look at a portfolio with respect to growth.

キーワード：パフォーマンス指標，ポートフォリオ成長
Key words : Performance Index, Portfolio Growth

1. はじめに

本小論は，情報科学研究 No. 30 (2009) における著者の論文 (石鎚 [2009]，以下論文と記す) の内容に関して若干の補足を行うものである。主に 2 つの点について補足する。

1 点目はトレードの評価に用いた指標についてである。論文では，現物買いでは信用売買を行わず，空売りでも (1 倍を超える) レバレッジは掛けないとし，トレード後の総収益率 (資産倍率) によってトレードの評価を行っている。ペア・トレードを扱っているので，各トレードは 1 銘柄ずつの買いと空売りからなる。売りの合計金額を分子とし，買いの合計金額を分母とする比率を基本的なパフォーマンス指標として用いている。これは資金運用の効率性を示す尺度ではあるが，空売り銘柄については買い値が利益確定まで分からないため，レバレッジが 1 倍を超えないということは必ずしも保証されない。誤差は大きくないが，その点を補足しておく。

2 点目はポートフォリオの構成についてである。論文では，伝統的な平均-分散ポートフォリオ理論によってペア銘柄のポートフォリオを組んでいる。これは 1 期間 (論文では 1 年単位) の最適化を多期間に渡って繰り返していることになる。しかし，多期間の最適化の場合には，資産の成長率を問題にするのが普通なのでその点についても補足したい。

受付：2010 年 10 月 29 日
受理：2010 年 10 月 29 日

2. パフォーマンス指標

論文では，各ペア・トレードの主要なパフォーマンスを以下のような資産倍率の近似値，あるいは，それから 1 を差し引いた収益率やその標準偏差などで評価した（石鎚[2009]，p. 12, Table 11)。ただし，添え字 0 は投資時点，添え字 1 は決済時点を意味する。

Table 1　Performance Index (1)

	ロング	ショート
$b<0$	$\dfrac{x_1+\lvert b\rvert y_0}{x_0+\lvert b\rvert y_1}$	$\dfrac{x_0+\lvert b\rvert y_1}{x_1+\lvert b\rvert y_0}$
$b>0$	$\dfrac{x_1+by_1}{x_0+by_0}$	$\dfrac{x_0+by_0}{x_1+by_1}$

ポジションがロングで $b<0$ のケースで説明する。これは，投資時点で銘柄 1 を価格 x_0 で 1 単位買い，銘柄 2 を価格 y_0 で $\lvert b\rvert$ 単位空売りするものである。決済時点では，銘柄 1 を価格 x_1 で 1 単位売り，銘柄 2 を価格 y_1 で $\lvert b\rvert$ 単位買い戻すことになる。Table 1 では，買値の総額を分母に，売値の総額を分子に取った比率を示している。他のケースも同様である。これらの指標は資金運用の効率性を示し，また資産倍率の近似値を与えるものであるが，1 倍を超えるレバレッジを掛けないという制約のもとでの評価という点からすると，指標の分母に将来（決済時点）の価格を用いていることが問題である。つまり，上記のケースだと，ポートフォリオ 1 単位の買値（指標分母の $x_0+\lvert b\rvert y_1$）は投資時点では不明のため，レバレッジの制約下で，何単位のペアが運用できるのかについても不確実性があることになる。

より現実的な指標を得るには，「証拠金付き空売り」（例えば，ルーエンバーガー[2002]，p. 214）の考え方を採用すればよいであろう。これは，「株を空売りするにあたって，証拠金としてその初期価格と同額の現金を差し出すことが求められている」と仮定することである。この考え方に従うと，上記の指標は Table 2 のようになる。例えば，先ほどと同じく，ポジションがロングで $b<0$ のケースだと，1 単位のポートフォリオについて，投資時点では，銘柄 1 を価格 x_0 で 1 単位買い，銘柄 2 を価格 y_0 で $\lvert b\rvert$ 単位空売りするために，現金 $x_0+\lvert b\rvert y_0$ が必要である。そして決済時点では，銘柄 1 を 1 単位売った x_1 と，銘柄 2 を価格 y_1 で $\lvert b\rvert$ 単位買い戻した利益 $\lvert b\rvert(y_0-y_1)$，および証拠金 $\lvert b\rvert y_0$ を手にすることになる（合計で $x_1+\lvert b\rvert(2y_0-y_1)$）。よって，資産は $\dfrac{x_1+\lvert b\rvert(2y_0-y_1)}{x_0+\lvert b\rvert y_0}$ 倍になる。他のケースも同様である。

Table 2　Performance Index (2)

	ロング	ショート
$b<0$	$\dfrac{x_1+\lvert b\rvert(2y_0-y_1)}{x_0+\lvert b\rvert y_0}$	$\dfrac{(2x_0-x_1)+\lvert b\rvert y_1}{x_0+\lvert b\rvert y_0}$
$b>0$	$\dfrac{x_1+by_1}{x_0+by_0}$	$2-\dfrac{x_1+by_1}{x_0+by_0}$

上記 4 ケースについて，指標間の値の違いを Figure 1 に例示する。これは，$x_0=y_0=1$，$b=\pm 1$ として x_1, y_1 を 0.8 から 1.2 まで変化させたときの指標値の差（Table 2 の値から Table 1 の値を引いた値）を示す等高線図である。

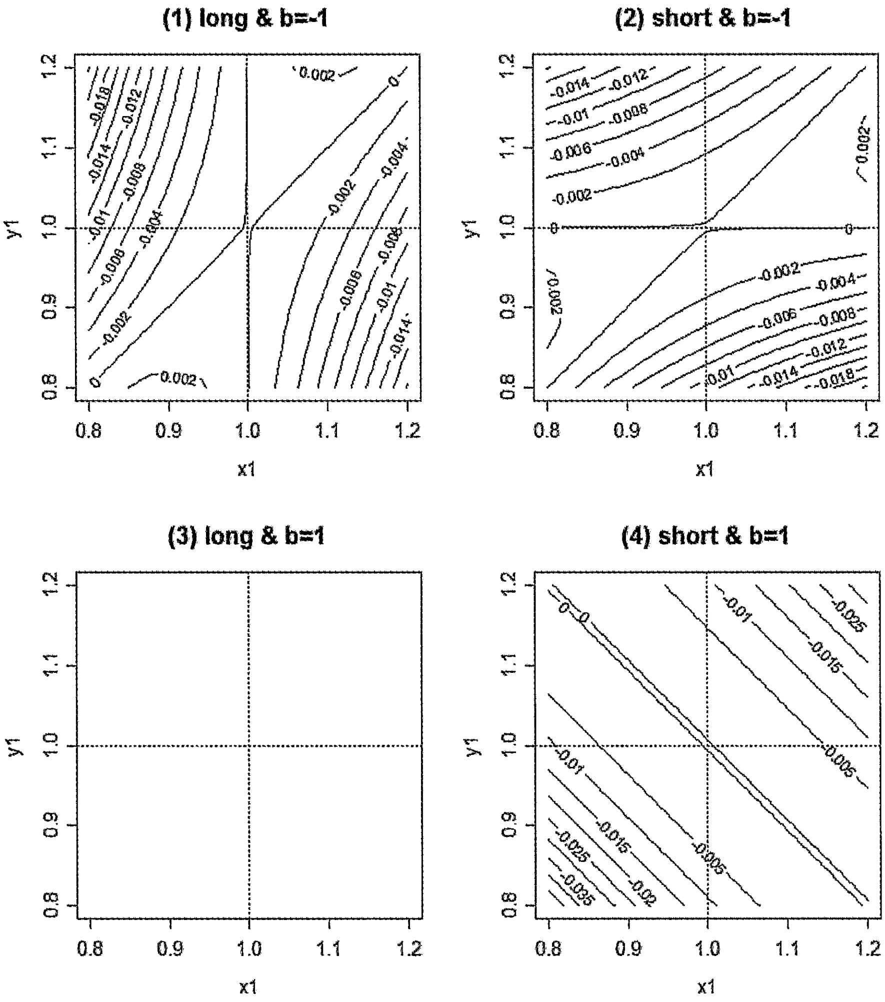


Figure 1　Difference between Performance Indices

ロングポジションでエントリした場合は，$b=1$ については誤差 0 である（左下 (3)）。また，$b=-1$（左上 (1)）については，Table 1, 2 の式から明らかなように，ショートポジションで $b=-1$ の場合の図（右上 (2)）を対角線 $y_1=x_1$ について対称に折り返した図になる。また，ショートで $b=1$ だと（x_1, y_1 が 0.8 から 1.2 では）ほぼ右下がりの直線になっている（右下 (4)）。

図のように，この例では誤差の程度はさほど大きくない。例えば，x_1, y_1 が x_0, y_0 より 10% 上下しても両指標の差は高々 1%程度であることが分かる。

3.　ポートフォリオ成長

論文で扱ったポートフォリオは，伝統的な平均-分散ポートフォリオであり，ペア・トレードにおける最小分散，接点（最大・シャープレシオ），等加重ポートフォリオのパフォーマンスを比較した。これは基本的に 1 期間投資の理論を多期間に繰り返し適用しただけであるが，現実の投資家は資産の成長を問題とするであろう。ここでは，成長率の観点からポートフォリオを作成し，その（Table 2 の指標に基づ

く）パフォーマンスを概観する。

最適成長率を与えるポートフォリオの重み $\boldsymbol{w}$ は以下の数理計画法の解として与えられる（例えば，ルーエンバーガー［2002］，第 15 章を参照。ただし，制約条件は若干変更している)。

$$\text{目的関数}\cdots z=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{w}-\frac{1}{2}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}\rightarrow \max.$$

$$\text{制約条件}\cdots\begin{cases}\mathbf{1}'\boldsymbol{w}=1\\ \boldsymbol{w}\geq\mathbf{0}\end{cases}.$$

ここで，$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\nu}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2$（$\boldsymbol{\nu}$ はペアの期待成長率，$\boldsymbol{\sigma}$ は対数ボラティリティを示すベクトル）であり，$\mathbf{S}$ は共分散行列である。また，$\mathbf{1}$ は全要素が 1 のベクトル，$\mathbf{0}$ はゼロベクトルである。各ペアはロング・ショートの組み合わせ（$b<0$）となることが多いが，制約条件 $\boldsymbol{w}\geq\mathbf{0}$ が示すように，以下では，ポートフォリオとしてはロングのみを扱っている。

3-1 対数最適戦略のパフォーマンス

最大成長率ポートフォリオ（max Gr）を接点ポートフォリオ（max Sr），最小分散ポートフォリオ（min var），等加重ポートフォリオ（eq weighted）と対比したモデル作成用データによるパフォーマンスを Figure 2 に示す。ここで，リバランスはしないとする。つまり，ポートフォリオを構成するペアへの

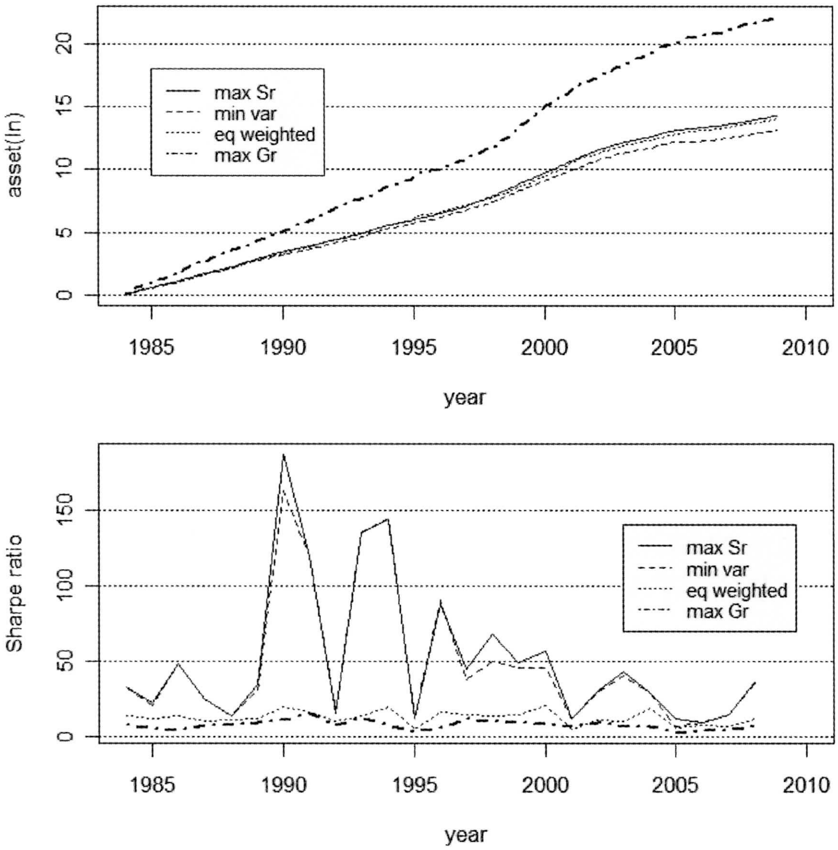


Figure 2 Portfolio Performances (1)

投資資金は，各ポートフォリオの重みに従って各年の最初に配分されるが，各ペアは 1 年間独立に運用されるとする。なお，ポートフォリオに組み入れるペアは，共和分検定（有意水準 0.1）で共和分関係にあると判定され，共和分ベクトルの第 2 要素が負であり，ペアを構成する各銘柄の終値が単位根検定で 1 次の和分過程と判定されたペア（論文での c1 クラス）である。

上のグラフは累積の資産変化，下のグラフは各年のシャープ・レシオを示している（max Gr は太い一点鎖線)。論文で扱ったトレードのロスは無視し，閾値は 0 としている（すなわち，共和分変数がその平均を下回れば買い，上回れば（空）売る)。資産変化は各ペアの月次収益率を元に計算し，シャープ・レシオは，月次収益率の標準偏差から求めた年次の標準偏差で年次収益率を除して求めている。

最終資産（対数）は，最大成長率（22.1)，接点（14.3)，等加重（14.1)，最小分散（13.2）の順である。また，各月ごとにポートフォリオのリバランスを行った場合の結果を Figure 3 に示す（つまり，ペアへの投資資金の割合を月ごとにポートフォリオの重みに一致させる)。この場合の最終資産（対数）は，最大成長率（22.2)，接点（14.2)，等加重（14.0)，最小分散（13.0）の順である。

いずれの場合もモデル作成用データを使用しているので，当然ながら極端に良い値を取っているが，最大成長率ポートフォリオの成長率は他を圧して高くなっている。リバランスした場合，最大成長率では，パフォーマンスが若干向上しており，他のポートフォリオは若干低下しているが，リバランスの有無はここではさほど影響がないようである。シャープ・レシオについては，接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオに極端に大きな値が含まれているので，単純な比較は意味をなさないが，最大値を

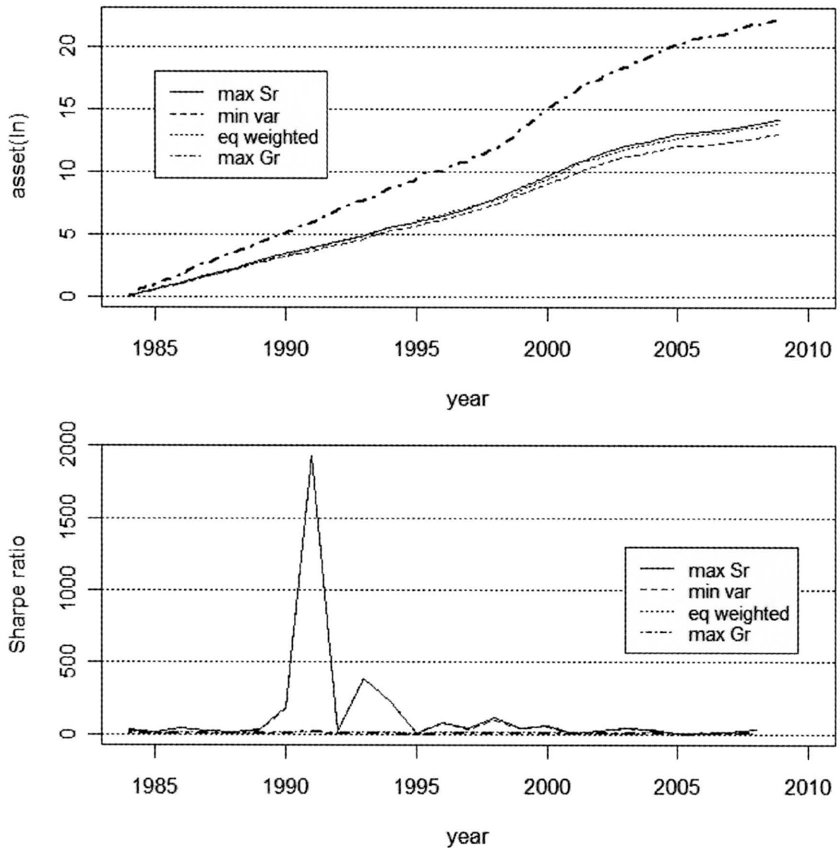


Figure 3　Portfolio Performances (2)

除いて比較すると，接点，最小分散ポートフォリオでは，リバランスなしの場合（平均はそれぞれ 45.8 と 43.6）よりもリバランスありの場合（平均は 64.3 と 61.6）が上回っている。最大成長率（平均は 8.2 と 7.8）と等加重（平均は 12.7 と 12.4）では差異は少ない。なお，収益率が負の年もあり得るため，シャープ・レシオについては注意が必要である（負の収益率の場合，標準偏差が大きいほどシャープ・レシオは高くなってしまう）。

次に，検証用データによるパフォーマンス（リバランスなし）を Figure 4 に示す。最終資産（対数）と平均シャープ・レシオは，接点（4.56 ; 2.51），最小分散（4.51 ; 2.41），等加重（3.94 ; 2.24），最大成長率（3.25 ; 1.44）の順である。最大成長率ポートフォリオによる資産変化は，1999 年から 2000 年にかけての急成長が認められるが，2005 年 12 月に大幅に落ち込んでいる。結局，モデル作成用データで見られたような安定した優位性は見られず，最終的なパフォーマンスは 4 つのポートフォリオ中で最低になっている。

検証用データでリバランスありの場合を Figure 5 に示す。最終資産（対数）と平均シャープ・レシオは，接点（4.11 ; 2.15），最小分散（4.02 ; 2.07），等加重（3.50 ; 1.89），最大成長率（3.24 ; 1.43）とリバランスありと同様の順である。こちらも 1999 年から 2004 年にかけて最大成長率ポートフォリオは急成長を示しているが，2005 年末の急激な落ち込みにより最終的なパフォーマンスは最低になっている。また，いずれのポートフォリオもリバランスしない場合よりパフォーマンスが低下しているが，最大成長率ポートフォリオはほとんど同じである。

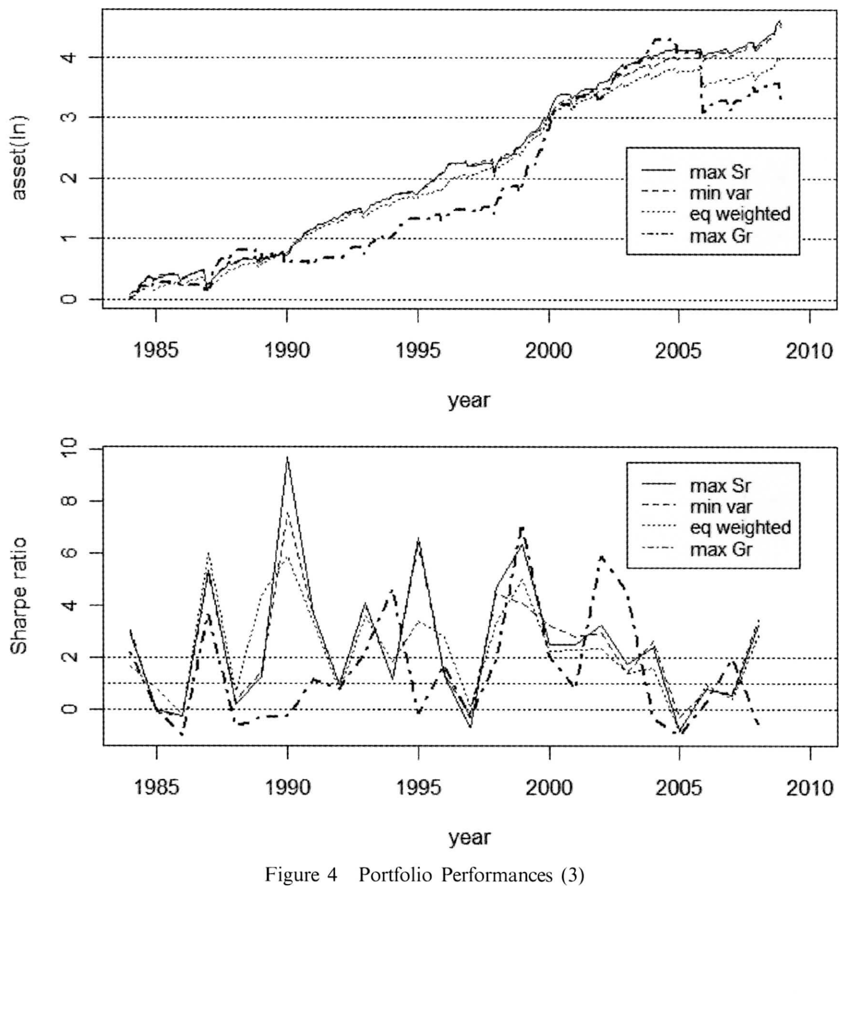


Figure 4 Portfolio Performances (3)

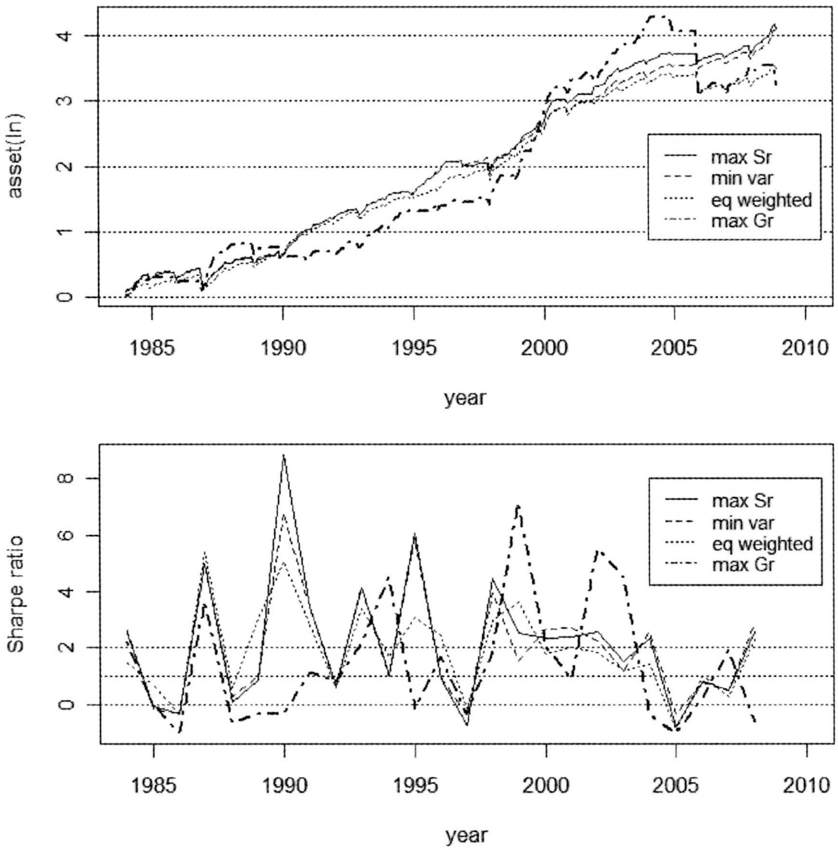


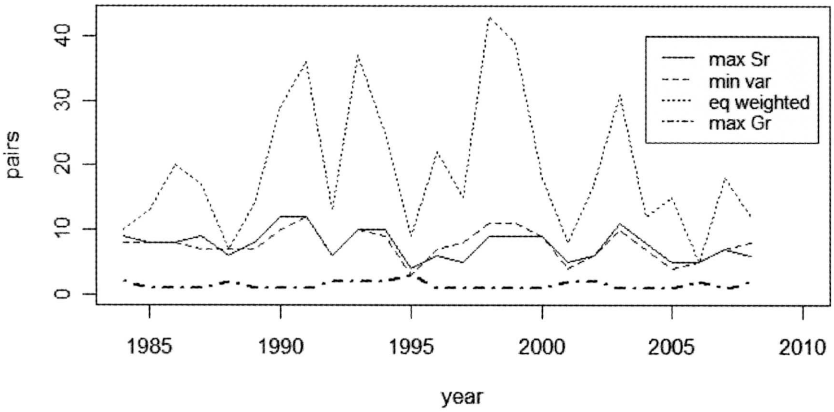
Figure 5　Portfolio Performances (4)

3-2　対数最適戦略の問題点

最大成長率ポートフォリオは成長率に関して理論上最適なはずであるが，これまで見てきたように，東証 1 部銘柄のペア・トレードにおいてはうまく機能しないようである。Figure 4，Figure 5 から明らかなように他のポートフォリオと比較して大きなボラティリティが見られ，リスクの分散化が不十分なようである。そこで，ポートフォリオを構成するペア数を調べた。

Figure 6 の上のグラフは，重みが 1% 以上のペアの数を示す。特に，等加重ポートフォリオ (eq weighted) については，ポートフォリオの候補となるペア数そのものの値を示している。平均ペア数は，接点 (7.72)，最小分散 (7.68)，等加重 (19.4)，最大成長率 (1.44) である。下の図は，候補となるペアに対して重みが 1%以上のペアの割合を示している。等加重ポートフォリオでは，常に 1 となるので省略している。平均の割合は，接点 (47.9%)，最小分散 (47.2%)，等加重 (100.0%)，最大成長率 (11.3%) である。やはり，最大成長率ポートフォリオを構成する実質的なペアは，すべての年において，他と比して非常に少ないと言える。

ポートフォリオの候補となるペアを，共和分関係にあると判定されたペア全体 (有意水準 0.1) に広げた場合 (論文での c クラス) に分散化が進むか調べてみる。重みが 1% 以上のペアの数と割合を同様に計算すると Figure 7 のようになる。平均ペア数は，接点 (8.88)，最小分散 (8.96)，等加重 (29.92)，最大成長率 (1.48) である。接点ポートフォリオと最小分散ポートフォリオでは平均して 1 ペア以上増えているが，最大成長率ポートフォリオについてはほとんど変化していないことが分かる。なお，1% 以上の



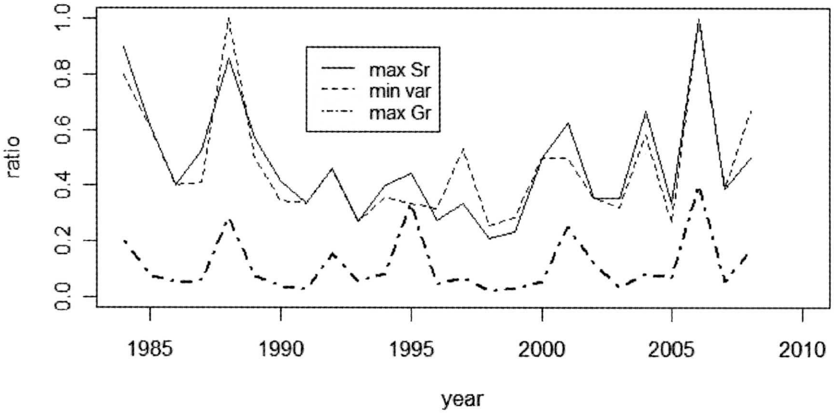


Figure 6 Number and Selection Ratio of Trading Pairs (1)

ペアの平均の割合は，接点 (33.7%)，最小分散 (34.6%)，等加重 (100.0%)，最大成長率 (5.8%) である。候補ペア数が増加しているので，この割合はいずれも下がっている。

共和分関係にあるペア全体を候補とするポートフォリオの検証データでのパフォーマンスは，以下のとおりである：リバランスなしの場合の最終資産 (対数) と平均シャープ・レシオは，接点 (4.76 ; 2.55)，最小分散 (4.58 ; 2.50)，等加重 (3.48 ; 1.94)，最大成長率 (3.43 ; 1.15) であり，最終資産については，接点，最小分散，最大成長率の 3 ポートフォリオについては若干向上し，等加重ポートフォリオは減少している。リバランスありの場合は，接点 (4.23 ; 2.15)，最小分散 (3.97 ; 2.06)，等加重 (3.02 ; 1.61)，最大成長率 (3.40 ; 1.15) であり，最終資産については，接点，最大成長率ポートフォリオについては若干向上し，等加重ポートフォリオは減少している。最小分散ポートフォリオはほとんど同じである。

等加重ポートフォリオでは，ペアの選択条件を緩めた分だけパフォーマンスは低下していると考えられ，共和分ベクトルの第 2 要素の符号や，単位根検定での判定はペア選択でそれなりの効果を有しているようである。また，接点，最小分散，最大成長率の 3 ポートフォリオについては，概ね良いペアの選択以上に分散化の効果の方が上回っていると考えられる。しかし，ここで扱っているペア・トレードにおける最大成長率ポートフォリオでは，ペア候補を広げても，実質的にはそのごく一部しかポートフォリオに組み込まれず，安定した資産の成長が得られないことが分かる。

1 つの試みとして，成長率に関する最小分散ポートフォリオと接点ポートフォリオを構成してみた (候補ペアは共和分関係にあるペア全体である)。検証用データによるそのパフォーマンスを Figure 8 に

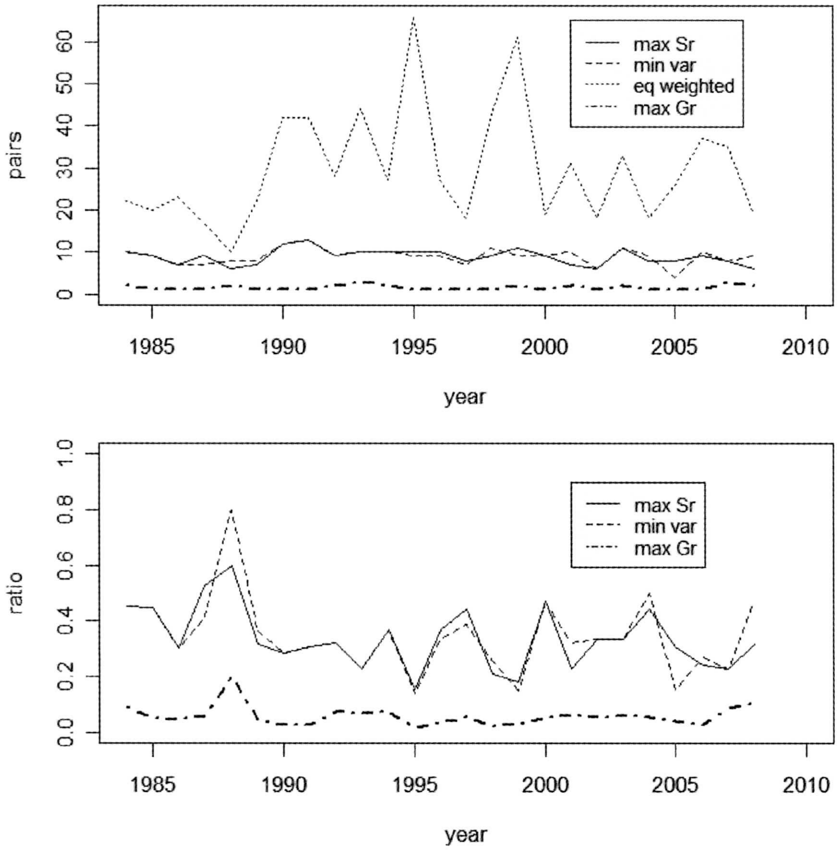


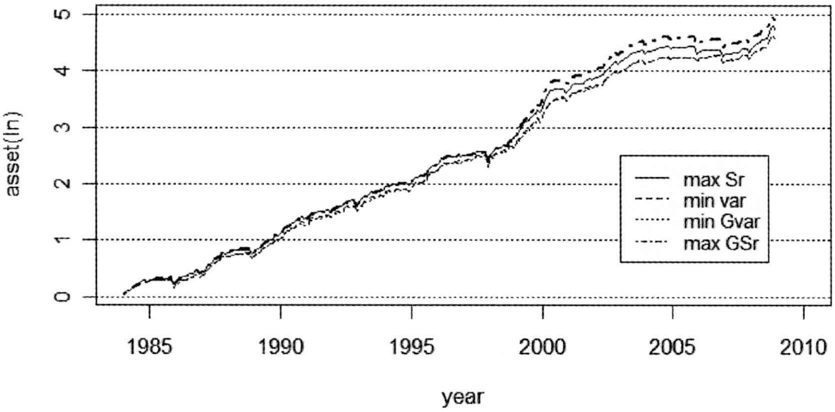
Figure 7　Number and Selection Ratio of Trading Pairs (2)

示す（リバランスなし）。min var, max Sr はこれまでと同じく，通常の最小分散，接点ポートフォリオを示す。min Gvar, max GSr は成長率に関する最小分散ポートフォリオ（以下 G 最小分散とも呼ぶ）と接点ポートフォリオ（以下 G 接点とも呼ぶ）である。最終資産（対数）と平均シャープ・レシオは，G 接点（4.91；2.69），接点（4.76；2.55），最小分散（4.58；2.50），G 最小分散（4.58；2.48）の順である。

最終資産（対数）と平均シャープ・レシオについて，いずれのポートフォリオも同じような推移を示しているが，資産については 2000 年以降一貫して G 接点が接点を上回っており，最終的に，実倍率では 84 倍と 69 倍となっている。

4. まとめ

著者の論文の内容に関して主に 2 点の補足を行った。パフォーマンスを測る指標については，（レバレッジ比率 1 の）空売りを行う場合，論文で用いた指標と通常用いられる総収益率（資産倍率）とで差異が生じるが，取り扱ったデータに関してその違いはそれほど大きなものではないことを示した。また，資産の成長率の観点からポートフォリオの構成を再検討した。今回検討したペア・トレーディングにおいては，最大成長率ポートフォリオは実質的な構成ペアが極端に少なくパフォーマンスは悪かった。成長率を勘案するとすれば，（成長率の意味で）シャープ・レシオを最大化する戦略の方が効果的だと考えられる。



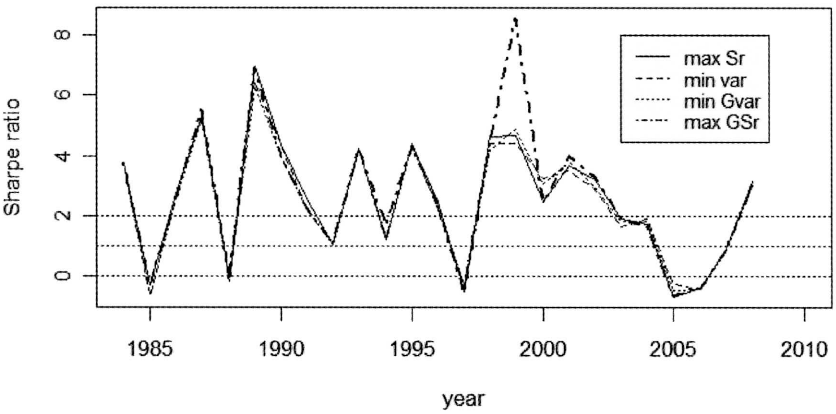


Figure 8 Portfolio Performances (5)

参 考 文 献

[1] 石鎚英也,「株式売買における統計的裁定のパフォーマンス」,『情報科学研究』, No. 30, 2009, pp. 1-34. (Ishizuchi, H., How Pairs Trading Works in the Japanese Stock Market, *Bulletin of the Institute of Information Science*, Senshu University, No. 30, 2009, pp. 1-34.).

[2] デービッド・G・ルーエンバーガー,『金融工学入門』, 日本経済新聞出版社, 2002.

注

1) 本論文は，2008 年度専修大学長期国内研究での成果公開の 1 つである．