確率計画法の理論と応用

Theory and Applications of Stochastic Programming

ネットワーク情報学部　高野 祐一
School of Network and Information　Yuichi TAKANO

Keywords：Probabilistic constraint, Two-stage stochastic programming, Portfolio selection

1　はじめに

数理計画法（mathematical programming）とは，現実の問題を数理モデルとして定式化して解くことによって，意思決定を支援する数理技術である．設備計画・生産計画・スケジューリング・配送計画・資金運用などの問題に対して，多くの企業で実際に数理計画法が活用され，業績の改善や業務の効率化を実現している．

しかし，様々な分野で現れる意思決定問題には，不確実要素が含まれることが多い．例えば，投資する株式の銘柄を選択する際には，将来の収益率が不確実である状況で決定をしなければならない．また，製品の生産計画を決定する場合には，製品の需要が変動することが意思決定を難しくしている．このような不確実性を考慮した数理計画法は，**確率計画法**（stochastic programming）と呼ばれる．

表 1 に示すように，確率計画法の起源は 1950 年代まで遡り [36]，古くから農業や畜産の分野で応用されてきた [45, 46]．そして，現在でも理論・応用共に盛んに研究されている．確率計画法の数理モデルは **2 段階確率計画問題**[1]（two-stage stochastic programming problem）と**確率制約条件問題**[2]（probabilistically constrained problem）に分けることができる．

2 段階確率計画問題は 1955 年から Beale [1] と Dantzig [10] によって独立に研究が開始された．Van Slyke-Wets [47] は L 型分解法を提案し，大規模な 2 段階確率計画問題を解くことを可能にした．また，2 段階確率計画問題は Olsen [25, 26, 27] などにより多段階の問題へと拡張されている [15]．

確率制約条件問題は Charnes-Cooper-Symonds [9]，Charnes-Cooper [8] によって 1958 年に提案された．この問題は一般には非凸計画問題[3]となり，効率的な解法を構築することは難しい．一方で，Prékopa [28, 29] は確率制約条件に凸解析を導入し，求解が比較的簡単な問題クラスを示した．

本稿の目的は，確率計画法の理論と応用について解説し，有用な文献を紹介することである．2 節では，不確実性下の数理計画法として，ロバスト最適化法と確率計画法を紹介する．3 節では確率制約条件問題について解説し，4 節では 2 段階確率計画問題について解説する．5 節では筆者の研究で扱った確率計画法の応用例を紹介し，6 節ではまとめと文献案内を述べる．

2　不確実性下の数理計画法

本節ではポートフォリオ選択問題を例に，ロバスト最適化法と確率計画法について説明する．

2.1　不確実性を有する制約条件

ポートフォリオ選択問題（portfolio selection problem）[22] とは，株式の銘柄などの金融資産に対して，収益性とリスクを考慮して投資配分を決定する問題である．

投資対象として n 種類の金融資産を考え，各資産の収益率を $\tilde{r}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とする．将来の（実際に投資した際の）収益率は現時点では分からないので，これらの収益率は全て確率変数とする[4]．ここで，各資産への投資比率 x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を決定するポートフォリオ選択問題を考える．

収益率と投資比率を表すベクトルをそれぞれ

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n)^\top,\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$$

とするとき，投資全体の収益率は

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^\top \boldsymbol{x} = \tilde{r}_1 x_1 + \tilde{r}_2 x_2 + \cdots + \tilde{r}_n x_n$$

と表せる．

ここで，投資が赤字にならないことを表す，以下の制約条件について考えてみよう：

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^\top \boldsymbol{x} \geq 0. \tag{1}$$

[1]償還請求問題（recourse problem）とも呼ばれる．
[2]機会制約条件問題（chance constrained problem）とも呼ばれる．
[3]凸集合を実行可能領域として凸関数を最小化する数理計画問題は凸計画問題と呼ばれ，局所的な探索を繰り返して大域的最適解に到達することができる．一方で，非凸計画問題は局所的最適解が複数存在する可能性があり，大域的最適解を見つけること（得られた解の大域的最適性を保証すること）は非常に難しい．
[4]本稿では，文字にチルダ（˜）を付けることで確率変数を表す．

表 1: 確率計画法の歴史

年号	内容（論文）
1955	2 段階確率計画問題の提案（Beale [1]，Dantzig [10]）
1955	農業分野における確率計画法の応用（Tintner [45]）
1958	確率制約条件問題の提案（Charnes-Cooper-Symonds [9]，Charnes-Cooper [8]）
1961	特殊な 2 段階確率計画問題に対する解法の提案（Beale [2]，Dantzig-Madansky [11]）
1963	確率制約条件を考慮した家畜飼料問題の研究（van de Panne-Popp [46]）
1969	2 段階確率計画問題に対する L 型分解法の提案（Van Slyke-Wets [47]）
1971	確率制約条件に対する凸解析の導入（Prékopa [28, 29]）
1976	多段階確率計画問題の定式化（Olsen [25, 26, 27] など）

ただし，式 (1) には確率変数 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ が含まれており，このままでは数理計画問題の制約条件として扱うことはできない．単純な方法としては，収益率の期待値のベクトル $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{r}}]$ を用いて，式 (1) を

$$\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{2}$$

に置き換えることが考えられる．しかしながら，制約条件 (2) を課したとしても，50%程度の確率で赤字が生じてしまい，投資が赤字になることを防ぐという観点からはあまり役に立たない．

2.2 ロバスト最適化法

このような不確実性の下での数理計画法として，**ロバスト最適化法**（robust optimization）[4, 5, 44] がある．ロバスト最適化法では不確実要素のとりうる値の範囲（不確実性集合）を設定し，その範囲の中の最悪ケースに着目して意思決定を行なう．

例えば，各資産の想定される最低の収益率を表すベクトルを $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^n$ とし，最高の収益率を表すベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ とする．この場合は，不確実性集合を以下のように定義する：

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{u}\}.$$

ロバスト最適化法では，範囲 $\mathcal{U}$ の中のどの収益率が実現したとしても，赤字にならないことを表す以下の制約条件を課す：

$$\boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{x} \geq 0 \quad (\forall \boldsymbol{r} \in \mathcal{U}). \tag{3}$$

また，空売り禁止（$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$）を仮定すると，制約条件 (3) は以下のように書き直せる：

$$\boldsymbol{\ell}^\top \boldsymbol{x} \geq 0.$$

つまり，全ての資産が同時に最低の収益率となった場合でも，赤字にならないという制約条件である．

不確実性集合 $\mathcal{U}$ を矩形や楕円とした場合には，制約条件 (3) は線形制約や 2 次錐制約などの比較的扱いやすい制約条件に変形できることが知られている．しかし，最悪ケースでも絶対に赤字にならないという制約条件は非常に厳しく，銀行預金などの収益性の低い投資しかできない可能性がある．また，ロバスト最適化法は不確実要素の値の範囲のみに着目しており，不確実要素の確率分布については全く考慮していない．よって，不確実要素が何らかの確率分布に従うことが想定される場合には，その情報を活用することで，より良い意思決定につながる可能性がある．

2.3 確率計画法

ロバスト最適化法とは対照的に，確率計画法では不確実要素の確率分布を考慮して意思決定を行なう．

投資が赤字になるリスクを回避したい場合には，自然な発想として「赤字になる確率」に着目することが考えられる．そこで，確率制約条件問題では「十分に高い確率で式 (1) が満たされる」ことを制約条件とする．充足確率を α 以上とする確率制約条件は，以下のように書ける：

$$\Pr[\tilde{\boldsymbol{r}}^\top \boldsymbol{x} \geq 0] \geq \alpha. \tag{4}$$

なお，確率変数 $\tilde{\boldsymbol{r}}$ の分布の台を $\mathcal{U}$ とし，充足確率水準を $\alpha = 1$ とすれば，確率制約条件 (4) はロバスト最適化法の制約条件 (3) も表すことができる．

一方で，2 段階確率計画問題では,「赤字になる確率」ではなく「赤字の大きさ」に注目する．具体的には，式 (1) の違反に対して罰金を課し，罰金の期待値が小さくなるように意思決定を行なう．例えば，赤字の大きさを表す決定変数 y と罰金を表す定数 q に対して，**償還請求費用**（recourse cost）を

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \min_y \{qy \mid y \geq -\boldsymbol{r}^\top \boldsymbol{x},\ y \geq 0\} \tag{5}$$

と定義する．そして，償還請求費用 (5) の期待値を，目的関数に追加して最小化する．このように 2 段階確率計

画問題は,「償還請求費用 (5) の計算」と「投資比率の決定」の 2 段階の数理計画問題となる.

2.4 考察

制約条件 (1) に対する，ロバスト最適化法と確率計画法の基本的な考え方は，以下のようにまとめられる：

ロバスト最適化法 想定される範囲内で，必ず赤字を回避する.

確率制約条件問題 一定値以上の確率で赤字を回避する.

2 段階確率計画問題 赤字の大きさに対して罰金を課す.

ロバスト最適化法による意思決定は保守的過ぎると批判されることが多いが，不確実性集合の形状と大きさを調整することで，ある程度この欠点は解消することができる．確率制約条件問題と 2 段階確率計画問題は，赤字になる頻度を減らしたいのか，それとも赤字の額を小さく抑えたいのかで使い分けるべきだと考える．ただし，確率制約条件問題は扱い難い数理計画問題として知られており，問題の扱いやすさという観点からは他の手法に利点がある.

3 確率制約条件問題

本節では，確率制約条件問題の定式化を示し，その凸性や保守的近似，解法について説明する.

3.1 確率制約条件問題の定式化

本節では，以下の問題を考える：

$$\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{最小化}} \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

$$\text{制約条件} \quad g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \le 0 \quad (i=1,2,\ldots,m), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{x} \in C. \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ は決定変数のベクトルとし，制約条件を満たしながら関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ の値が最小になるように決定する．$\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は確率変数の d 次ベクトルとし，分布の台を $\Xi\subseteq\mathbb{R}^d$ とする．制約条件の関数 $g_i:\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ の値は確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ に依存する．$C\subseteq\mathbb{R}^n$ は他の制約条件によって定義される実行可能領域とする．確率変数を含む目的関数 $f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ を最小化する場合は，決定変数 $y\in\mathbb{R}$ を導入して目的関数とし，制約条件に $f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})-y\le 0$ を追加すれば，問題 (6)–(8) の形式に帰着できる.

同時確率制約条件（joint probabilistic constraint）は，m 本の制約条件が同時に満たされる確率を α 以上とする：

$$\Pr[g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\le 0\ (i=1,2,\ldots,m)]\ge\alpha. \tag{9}$$

一方で，**個別確率制約条件**（separate probabilistic constraint）は，制約条件ごとに充足確率の制約を課す：

$$\Pr[g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\le 0]\ge\alpha_i \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{10}$$

3.2 同時確率制約条件の凸性

同時確率制約条件 (9) の凸性について，以下の定理が知られている：

定理 3.1 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の確率密度関数は対数凹関数[5]であり，関数 $g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ $(i=1,2,\ldots,m)$ は $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ について凸関数であるとする．このとき，同時確率制約条件 (9) の実行可能領域は凸集合である.

証明 Kall-Wallace [21] の 1.6 節や，椎名 [34] の 13.4.1 節などを参照されたい.

（凸集合上の）一様分布・多変量正規分布・ガンマ分布など，多数の分布の確率密度関数が対数凹関数となることが知られている [20]．しかし，関数 $g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ が $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ について凸関数であるという条件は非常に厳しい.

定理 3.1 を適用できる例としては，以下の同時確率制約条件がある：

$$\Pr[h_i(\boldsymbol{x})\le\tilde{b}_i\ (i=1,2,\ldots,m)]\ge\alpha. \tag{11}$$

ただし，$h_i:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ は凸関数とし，$\tilde{\boldsymbol{b}}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\ldots,\tilde{b}_m)^\top$ は確率変数の m 次ベクトルとする．ここで，$\tilde{\boldsymbol{b}}$ の確率密度関数が対数凹関数の場合には，定理 3.1 より確率制約条件 (11) の実行可能領域は凸集合となる.

3.3 個別確率制約条件の凸性

ここでは，以下の個別確率制約条件（$m=1$）を考える:

$$\Pr[\tilde{\boldsymbol{a}}^\top\boldsymbol{x}\le\tilde{b}]\ge\alpha, \tag{12}$$

ただし，$\tilde{\boldsymbol{a}}$ は確率変数の n 次ベクトル，$\tilde{b}$ は確率変数とする．確率制約条件 (12) は，Value-at-Risk [14] をリスク尺度としたポートフォリオ選択問題など，多くの問題に現れる．この凸性について，以下の定理が知られている：

定理 3.2 $(\tilde{\boldsymbol{a}},\tilde{b})$ は多変量正規分布に従い，充足確率水準 α は 0.5 以上とする．このとき，個別確率制約条件 (12) の実行可能領域は凸集合であり，2 次錐制約に変換することができる.

証明 Kall-Wallace [21] の 4.2 節や，椎名 [34] の 13.4.3 節などを参照されたい.

充足確率水準 α は 1 に近い値とすることが多いため，$\alpha\ge 0.5$ という条件は厳しいものではない．また，2 次錐制約は一般の非線形制約よりも扱いやすい.

[5] 定義については文献 [21, 34] などを参照されたい.

3.4　確率制約条件の保守的近似

個別確率制約条件 (10) は，制約条件を違反する確率が $1-\alpha_i$ 以下であることを表す，以下の確率制約条件に書き直すことができる：

$$\Pr[g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})>0]\le 1-\alpha_i \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{13}$$

ここで，正区間の指示関数 $\mathbf{1}_{(0,+\infty)}\colon \mathbb{R}\to\{0,1\}$ を

$$\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

とし，関数 $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について以下が成り立つとする：

$$\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)\le\psi(x)\quad(\forall x\in\mathbb{R}).$$

このとき，確率変数 $\tilde{Z}$ に対して以下の関係が成り立つ：

$$\Pr[\tilde{Z}>0]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(\tilde{Z})]\le\mathbb{E}[\psi(\tilde{Z})].$$

よって，$\tilde{Z}=g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ とすれば，制約条件

$$\mathbb{E}[\psi(g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}}))]\le 1-\alpha_i \quad (i=1,2,\ldots,m) \tag{14}$$

が成立する場合には，確率制約条件 (13) も成立することが分かる．ゆえに，制約条件 (14) は確率制約条件 (13) の**保守的近似**（conservative approximation）と呼ばれる．

関数 $g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ $(i=1,2,\ldots,m)$ は，すべての $\boldsymbol{\xi}\in\Xi$ に対して（$\boldsymbol{\xi}$ を定数としたときに）$\boldsymbol{x}$ について凸関数であるとする．このとき，関数 ψ を単調非減少凸関数とすると，保守的近似 (14) の実行可能領域は凸集合となる [24]．一方で，Takano-Gotoh [37] は関数 ψ に非凸関数を用いて，近似精度を調節可能な保守的近似を構成し，分枝限定法による解法を提案した．

なお，関数

$$g_{\max}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\max\{g_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mid i=1,2,\ldots,m\}$$

も $\boldsymbol{x}$ について凸関数であり，同時確率制約条件 (9) は個別確率制約条件

$$\Pr[g_{\max}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})\le 0]\ge\alpha$$

に帰着できる．ゆえに上記と同様の手順で，同時確率制約条件 (9) の保守的近似を構成することもできる．

3.5　確率制約条件問題の解法

確率制約条件問題は，上述のような凸性の条件が成り立つ場合には，理論上は非線形計画法のアルゴリズムを適用して解くことができる．ただし，確率制約条件の評価には多重積分が必要となるために，計算負荷が大きい．サンプリングなどの方法で離散分布による近似を行なえば，多重積分による計算負荷は解消されるが，実行可能領域が凸集合となることは期待できない．確率制約条件問題に対しては様々な数値解法が提案されているが [12]，標準的な解法は存在せず，研究の余地が十分に残されていると言える．

4　2 段階確率計画問題

本節では，2 段階確率計画問題の定式化と解法について説明する．

4.1　2 段階確率計画問題の定式化

本節では，以下の問題を考える：

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{最小化}}\quad & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} && (15)\\ \text{制約条件}\quad & \boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{\xi}})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}), && (16)\\ & \boldsymbol{x}\in C. && (17)\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ は定数ベクトルとする．$\boldsymbol{A}\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{m\times n}$ と $\boldsymbol{b}\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ は $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を入力とし，それぞれ $m\times n$ 次行列と m 次ベクトルを出力する関数である．

2 段階確率計画問題では，制約条件 (16) の違反に対する罰金を表す償還請求費用 $Q(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ を定義し，その期待値を目的関数と共に最小化する：

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{最小化}}\quad & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}+\mathbb{E}[Q(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{\xi}})] && (18)\\ \text{制約条件}\quad & \boldsymbol{x}\in C. && (19)\end{aligned}$$

単純償還請求（simple recourse）では，確率変数の実現値 $\boldsymbol{\xi}$ に対する償還請求費用を，以下のように定義する：

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\min_{\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-}\left\{\begin{array}{l}(\boldsymbol{q}^+)^\top\boldsymbol{y}^+\\ +(\boldsymbol{q}^-)^\top\boldsymbol{y}^-\end{array}\;\middle|\;\begin{array}{l}\boldsymbol{y}^+-\boldsymbol{y}^-\\ \quad=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-\ge\mathbf{0}\end{array}\right\},$$

ただし，$\boldsymbol{y}^+,\boldsymbol{y}^-\in\mathbb{R}^m$ は決定変数のベクトルとし，制約条件の違反の大きさを表す．また，$\boldsymbol{q}^+,\boldsymbol{q}^-\in\mathbb{R}^m$ は非負の定数ベクトルであり，制約条件の違反に対する罰金を表す．

より一般には，償還請求費用は

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\min_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\ell}\left\{\boldsymbol{q}^\top\boldsymbol{y}\;\middle|\;\begin{array}{l}\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\ge\mathbf{0}\end{array}\right\} \tag{20}$$

のように定義される．ここで，$\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^\ell$ は定数ベクトル，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^\ell$ は決定変数のベクトルとする．行列 $\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^{m\times\ell}$ が確率変数に依存しないことから，上記の償還請求は**固定償還請求**（fixed recourse）と呼ばれる．

ここで，決定変数 $\boldsymbol{y}$ は確率変数の実現値 $\boldsymbol{\xi}$ に応じて定まることに注意しよう．つまり，$\boldsymbol{y}$ は確率変数の実現値を観測してから決定する変数であり，**待機決定**（wait-and-see decision）と呼ばれる．一方で，$\boldsymbol{x}$ は確率変数の実現値を観測する前に決定する変数であり，**即時決定**（here-and-now decision）と呼ばれる．不確実性への事後処理（待機決定）を考慮して事前処理（即時決定）を最適化す

ることが，ロバスト最適化法や確率制約条件問題とは異なる，2 段階確率計画問題の特徴である．

ここからは，確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ は離散分布に従うことを仮定する．具体的には，シナリオ $k = 1, 2, \ldots, s$ における確率変数の実現値を $\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \ldots, \boldsymbol{\xi}^s$ とし，各シナリオの生起確率を $p_1, p_2, \ldots, p_s$ とする．また，$\boldsymbol{y}^k \in \mathbb{R}^\ell$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ は各シナリオの待機決定を表す決定変数とする．

このとき，固定償還請求 (20) を有する 2 段階確率計画問題 (18), (19) は，以下の線形計画問題に帰着できる：

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^k}{\text{最小化}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{s} p_k \boldsymbol{q}^\top \boldsymbol{y}^k && (21) \\
\text{制約条件} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^k)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}^k) \\
& \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, s), && (22) \\
& \boldsymbol{y}^k \geq \boldsymbol{0} \quad (k = 1, 2, \ldots, s), && (23) \\
& \boldsymbol{x} \in C. && (24)
\end{aligned}
$$

4.2 2 段階確率計画問題の解法

問題 (21)–(24) は線形計画問題ではあるが，シナリオ数に依存して問題の規模が大きくなることが難点である．一方で，制約条件 (22) を行列表記すると，

$$
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^1) & \boldsymbol{W} & & \\
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^2) & & \boldsymbol{W} & \\
\vdots & & & \ddots & \\
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}^s) & & & & \boldsymbol{W}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^1 \\ \boldsymbol{y}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^s
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}^1) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}^2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}^s)
\end{pmatrix}
$$

となり，**双対分解原理**（dual decomposition principle）を適用することができる．双対分解原理に基づく代表的な解法として，混合整数計画問題に対する Benders の分解法 [3] を応用した，**L 型分解法**（L-shaped decomposition method）がある．

L 型分解法では，2 段階確率計画問題 (18), (19) に対して，償還請求費用の期待値 $\mathbb{E}[Q(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})]$ を表す決定変数 θ を導入し，以下の緩和問題を解く：

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x}, \theta}{\text{最小化}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \theta && (25) \\
\text{制約条件} \quad & \boldsymbol{x} \in C. && (26)
\end{aligned}
$$

そして，得られた解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に対して，シナリオ $k = 1, 2, \ldots, s$ ごとに償還請求費用 $Q(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\xi}^k)$ を計算し，変数 θ の値が $\mathbb{E}[Q(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})]$ に近づくように，緩和問題 (25), (26) に制約条件（実行可能性カット・最適性カット）を追加していく．詳細は，Kall-Wallace [21] の 3.2 節や，椎名 [34] の 13.3.2 節などを参照されたい．

大規模な問題を解く場合には，計算効率よりもコンピュータの記憶容量の不足が障害になることが多い．このような場合には，問題を（シナリオごとに）分解して処理できる分解法には大きな利点がある．一方で，コンピュータと数理計画ソルバーの性能が共に大きく発達した現在では，問題 (21)–(24) を数理計画ソルバーに直接解かせてしまった方が，L 型分解法よりも問題を高速に解ける場合が多いようだ．ただし，整数変数が含まれる場合など，分解法によって計算効率が大きく改善するような問題例もある [42].

5 確率計画法の応用

本節では，筆者の研究で扱った確率計画法の応用例を紹介する．

5.1 新聞売り子問題

需要数が不確実な状況で商品の仕入れ数を決定する問題は，**新聞売り子問題**（newsvendor problem）と呼ばれる．仕入れ数が需要数に一致しなかった場合に罰金が課されると考えれば，新聞売り子問題は 2 段階確率計画問題の一例であることが分かる．Gotoh-Takano [17] では，ファイナンスの分野で提案されたリスク尺度 **conditional value-at-risk**（**CVaR**）[30, 31] を新聞売り子問題に導入して，解析解を導出し，線形計画問題として定式化する解法も示した．

5.2 ポートフォリオ選択問題

5.2.1 コンスタント・リバランス戦略

一定期間ごとに投資比率を（当初の投資比率に）修正する投資戦略は，**コンスタント・リバランス戦略**（constant rebalancing strategy）と呼ばれる．この戦略は，基本的には価格が下がった資産を購入し，価格が上がった資産を売却する（安く買って高く売る）逆張り戦略であり，中長期的な投資で有効とされている．しかし，コンスタント・リバランス戦略における最適な投資比率を決定する問題は，一般には非凸計画問題となり，最適解を得ることは非常に難しい．Takano-Gotoh [38] では，リバランスの際の取引コストを考慮した問題に対して，発見的解法を提案した．Takano-Sotirov [43] では，問題を多項式最適化問題として定式化し，半正定値計画緩和法と切除平面法を組み合わせた厳密解法を提案した．

5.2.2 カーネル法による制御政策の最適化

カーネル法（kernel method）とは，機械学習の分野で提案された非線形データ解析の手法である．多期間ポートフォリオ選択問題は，リバランス戦略を表す**制御政策**

(control policy）を最適化する問題とみなすことができるが，広いクラスの制御政策を選択の対象として問題を解くことは困難である．Takano-Gotoh [39] では，制御政策の最適化問題に対して，カーネル法を利用した求解可能な定式化を示した．さらに，Takano-Gotoh [40] では，カーネル法を利用した定式化に対して，次元縮約に基づく効率的な解法を提案した．

5.2.3 CVaR 最小化問題に対する効率的解法

リスク尺度として CVaR を用いたポートフォリオ選択問題は，投資対象資産の収益率分布を離散分布によって近似することで，線形計画問題として定式化できる．しかし，サンプリング誤差を軽減するためにはシナリオ数を十分に多くする必要があり，解くべき問題が大規模になってしまう．後藤-高野-山本-和田 [18] では，シナリオの部分集合だけを利用する効率的な解法を提案した．Takano-Nanjo-Sukegawa-Mizuno [42] では，取引コストを考慮した問題に対して切除平面法を適用し，計算の高速化と記憶容量の節約を実現した．

5.3 競争入札戦略の最適化

競争入札（competitive bidding）とは，プロジェクトの受注先を決定する際などに使われる方法であり，契約希望者に入札価格を提出させて最も低い価格で入札した者が落札する．契約希望者は，プロジェクトを実行するために必要な費用を見積もり，その見積もりに基づいて入札価格を決定する．しかし，見積もりの誤差が大きければ，受注したプロジェクトが損失をもたらすような可能性もあり，見積もりの不確実性を考慮して適切な入札価格を決定する必要がある．Takano-Ishii-Muraki [41] では，多期間にわたる入札戦略を決定する問題に対して，確率動的計画法による解法を提案した．

6 おわりに

本稿では，確率計画法の理論と応用について解説した．現実の意思決定問題には不確実要素が含まれる場合が多く，不確実性を考慮して意思決定を行なう確率計画法の重要性は多くの研究者・実務家に認識されている．しかし，確率計画法を学習するためには数理計画法・確率論・統計学などの基礎知識が必要となり，初学者には敷居が高いとも感じる．そこで，本稿の読者のさらなる学習のために，有用な文献を紹介して本稿のまとめとしたい．

確率計画法の初学者向けテキストとしては，Kall-Wallace [21] が最も分かりやすい．現在は Stochastic Programming Community のウェブページ[6]で，PDF ファイルを無料で入手することができる．Kall-Mayer [20] には，より新しく発展的な内容が含まれている．Kall [19] や Ruszczyński-Shapiro [33] は，基本的な内容がまとまっている．

確率制約条件問題については，Dentcheva [12, 13] が詳しい．2 段階確率計画問題については Birge-Louveaux [7] が詳しく，分解法を中心とした解法については Birge [6] や Ruszczyński [32] で解説されている．Ermoliev-Wets [16] では確率計画法の様々な解法が紹介されている．

日本語で書かれた確率計画法の解説は少ないが，南石 [23]，椎名 [34, 35] は優れている．本稿における確率計画法の用語の日本語訳は，椎名 [34] を参考にした．

[6] `http://stoprog.org/`

謝辞

本稿を執筆する機会をくださりました，ネットワーク情報学部の田中稔先生に感謝いたします．

参考文献

[1] Beale, E. M. L. (1955). On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 17*, 173–184.

[2] Beale, E. M. L. (1961). The use of quadratic programming in stochastic linear programming. Rand Report P-2404-1, The RAND Corporation.

[3] Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik, 4*, 238–252.

[4] Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., & Nemirovski, A. (2009). *Robust optimization*. Princeton University Press.

[5] Bertsimas, D., Brown, D. B., & Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review, 53*, 464–501.

[6] Birge, J. R. (1997). Stochastic programming: Computation and applications. *INFORMS Journal on Computing, 9*, 111–133.

[7] Birge, J. R., & Louveaux, F. (2011). *Introduction to stochastic programming* (2nd ed.). Springer.

[8] Charnes, A., & Cooper, W. W. (1959). Chance-constrained programming. *Management Science, 6*, 73–79.

[9] Charnes, A., Cooper, W. W., & Symonds, G. H. (1958). Cost horizons and certainty equivalents: An approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science, 4*, 235–263.

[10] Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science, 1*, 197–206.

[11] Dantzig, G. B., & Madansky, A. (1961). On the solution of two-stage linear programs under uncertainty. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Vol. 1, pp. 165–176).

[12] Dentcheva, D. (2006). Optimization models with probabilistic constraints. In Calafiore, G. & Dabbene, F. (Eds.), *Probabilistic and randomized methods for design under uncertainty* (pp. 49–97). Springer.

[13] Dentcheva, D. (2009). Optimization models with probabilistic constraints. In Shapiro, A., Dentcheva, D., & Ruszczyński, A. (Eds.), *Lectures on stochastic programming: Modeling and theory* (pp. 87–153). SIAM.

[14] Duffie, D., & Pan, J. (1997). An overview of value at risk. *The Journal of Derivatives, 4*, 7–49.

[15] Dupačová, J. (1995). Multistage stochastic programs: The state-of-the-art and selected bibliography. *Kybernetika, 31*, 151–174.

[16] Ermoliev, Y., & Wets, R. J.-B. (1988). *Numerical techniques for stochastic optimization.* Springer.

[17] Gotoh, J., & Takano, Y. (2007). Newsvendor solutions via conditional value-at-risk minimization. *European Journal of Operational Research, 179*, 80–96.

[18] 後藤順哉・高野祐一・山本芳嗣・和田保乃 (2011).「企業価値変動モデルと CVaR を用いた与信ポートフォリオ最適化問題とその効率的解法」『日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌』54, 23–42.

[19] Kall, P. (1982). Stochastic programming. *European Journal of Operational Research, 10*, 125–130.

[20] Kall, P., & Mayer, J. (2011). *Stochastic linear programming: Models, theory, and computation* (2nd ed.). Springer.

[21] Kall, P., & Wallace, S. W. (1994). *Stochastic programming.* John Wiley & Sons. Retrieved from `http://stoprog.org/files/manujw.pdf`

[22] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance, 7*, 77–91.

[23] 南石晃明 (1995).『確率的計画法：不確実性に挑む知恵と技術』現代数学社.

[24] Nemirovski, A., & Shapiro, A. (2006). Convex approximations of chance constrained programs. *SIAM Journal on Optimization, 17*, 969–996.

[25] Olsen, P. (1976). Multistage stochastic programming with recourse: The equivalent deterministic problem. *SIAM Journal on Control and Optimization, 14*, 495–517.

[26] Olsen, P. (1976). When is a multistage stochastic programming problem well-defined?. *SIAM Journal on Control and Optimization, 14*, 518–527.

[27] Olsen, P. (1976). Multistage stochastic programming with recourse as mathematical programming in an L_p space. *SIAM Journal on Control and Optimization, 14*, 528–537.

[28] Prékopa, A. (1971). Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. *Acta Scientiarum Mathematicarum, 32*, 301–316.

[29] Prékopa, A. (1973). Logarithmic concave measures and functions. *Acta Scientiarum Mathematicarum, 34*, 335–343.

[30] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk, 2*, 21–42.

[31] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance, 26*, 1443–1471.

[32] Ruszczyński, A. (2003). Decomposition methods. In Ruszczyński, A. & Shapiro, A. (Eds.), *Stochastic programming* (pp. 141–211). Elsevier.

[33] Ruszczyński, A., & Shapiro, A. (2003). Stochastic programming models. In Ruszczyński, A. & Shapiro, A. (Eds.), *Stochastic programming* (pp. 1–64). Elsevier.

[34] 椎名孝之 (2002).「確率計画法」久保幹雄・田村明久・松井知己 編集『応用数理計画ハンドブック』(pp. 710–769). 朝倉書店.

[35] 椎名孝之 (2004).「電気事業への確率計画法の応用」『知能と情報 (日本知能情報ファジィ学誌)』16, 528–539.

[36] Stancu-Minasian, I. M., & Wets, M. J. (1976). A research bibliography in stochastic programming, 1955–1975. *Operations Research, 24*, 1078–1119.

[37] Takano, Y., & Gotoh, J. (2010). α-conservative approximation for probabilistically constrained convex programs. *Computational Optimization and Applications, 46*, 113–133.

[38] Takano, Y., & Gotoh, J. (2011). Constant rebalanced portfolio optimization under nonlinear transaction costs. *Asia-Pacific Financial Markets, 18*, 191–211.

[39] Takano, Y., & Gotoh, J. (2011). A nonlinear control policy using kernel method for dynamic asset allocation. *Journal of the Operations Research Society of Japan, 54*, 201–218.

[40] Takano, Y., & Gotoh, J. (2014). Multi-period portfolio selection using kernel-based control policy with dimensionality reduction. *Expert Systems with Applications, 41*, 3901–3914.

[41] Takano, Y., Ishii, N., & Muraki, M. (2014). A sequential competitive bidding strategy considering inaccurate cost estimates. *Omega, 42*, 132–140.

[42] Takano, Y., Nanjo, K., Sukegawa, N., & Mizuno, S. (in press). Cutting plane algorithms for mean-CVaR portfolio optimization with nonconvex transaction costs. *Computational Management Science.*

[43] Takano, Y., & Sotirov, R. (2012). A polynomial optimization approach to constant rebalanced portfolio selection. *Computational Optimization and Applications, 52*, 645–666.

[44] 武田朗子 (2006). 「不確実性下での最適化 —ロバスト最適化を中心に—」『オペレーションズ・リサーチ』51, 420–423.

[45] Tintner, G. (1955). Stochastic linear programming with applications to agricultural economics. *Proceedings of the 2nd Symposium on Linear Programming* (pp. 197–209).

[46] van de Panne, C., & Popp, W. (1963). Minimum-cost cattle feed under probabilistic protein constraints. *Management Science, 9*, 405–430.

[47] Van Slyke, R., & Wets, R. J.-B. (1969). L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 17*, 638–663.