

3次方程式の解の絶対値がすべて1以下であるための必要十分条件について

On the necessary and sufficient condition that for a cubic equation all the absolute values of its solutions are less than or equal to 1

ネットワーク情報学部 佐藤 創

School of Network and Information Hajime SATO

Keywords : cubic equations, solutions, Cardano's method

まえがき

行列の固有値の絶対値がすべて1以下であることを求められることがある。これは実係数の代数方程式の解の絶対値がすべて1以下となるための必要十分条件を求める問題に一般化される。

2次方程式と3次方程式についてのみ解決し、結果がきれいだったので報告する。簡潔な証明を求めている。

1 2次方程式

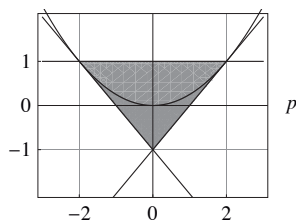
この場合は容易である。

定理 1 p, q を実係数とする2次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p, q: \text{実数}) \quad (1)$$

の解の絶対値が1以下となる (p, q) の領域 S は次の通り:

$$S = \left\{ (p, q) \mid |p| - 1 \leq q \leq 1 \right\}. \quad (2)$$



証明 $f(x) = x^2 + px + q$ とおく。方程式 (1) の判別式 $D = p^2 - 4q$ は極小値 $f(-p/2)$ の -4 倍にあたる。

1° $D \geq 0$ ($\Leftrightarrow q \leq p^2/4$) のときの必要十分条件は

$$-1 \leq -\frac{p}{2} \leq 1, \quad f(1) \geq 0, \quad f(-1) \geq 0$$

である。条件 $D \geq 0$ と組み合わせて次のようになる:

$$|p| - 1 \leq q \leq \frac{p^2}{4} \leq 1. \quad (3)$$

2° $D < 0$ ($\Leftrightarrow q > p^2/4$) のときの必要十分条件は、方程式 (1) の共役複素解を α, β とすれば

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \alpha\beta = q \quad \text{より} \quad q \leq 1$$

である。条件 $D < 0$ と組み合わせると次のようになる:

$$\frac{p^2}{4} < q \leq 1. \quad (4)$$

(3) と (4) を合わせると、求める必要十分条件

$$|p| - 1 \leq q \leq 1 \quad (5)$$

が得られる (判別式が表面に現われない)。 (証明終り)

2 3次方程式

2.1 2次の項がない場合

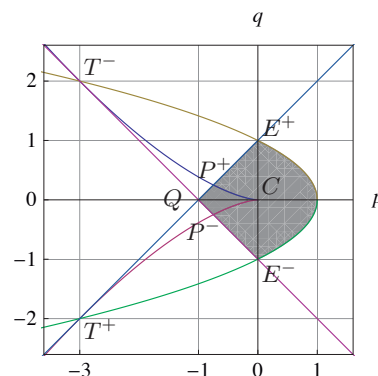
まず、2次の項のない簡単な方程式を考える。

定理 2 p, q を実係数とする3次方程式

$$x^3 + px + q = 0 \quad (6)$$

の解の絶対値が1以下となる (p, q) の領域 S は次の通り:

$$S = \left\{ (p, q) \mid |q| - 1 \leq p \leq 1 - q^2 \right\}. \quad (7)$$



証明 $f(x) = x^3 + px + q$ とおく. 方程式 (6) の判別式 D は解 α, β, γ の置換に関する基本交代式の平方

$$D = ((\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha))^2 = -27q^2 - 4p^3 \quad (8)$$

である. $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $p < 0$ であり, 2つの極値の積は

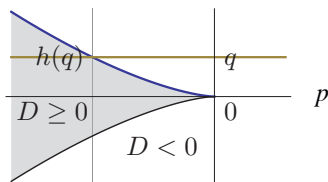
$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -\frac{1}{27} D$$

となる. したがって, よく知られた次の結果が導かれる:

$$\begin{cases} D \geq 0 \Leftrightarrow 3\text{つの実数解をもつ.} \\ \quad (\text{とくに, } D = 0 \Leftrightarrow \text{重解, または3重解をもつ.}) \\ D < 0 \Leftrightarrow 1\text{つの実数解と共役複素数解をもつ.} \end{cases}$$

$$h(q) = -3\sqrt[3]{q^2/4} \quad (\leq 0) \quad (9)$$

とおけば, $D \geq 0 \Leftrightarrow p \leq h(q)$ である.



さて, 問題を判別式の符号で場合分けして考察する.

1° $D \geq 0$ ($\Leftrightarrow p \leq h(q)$) のとき,

解の絶対値がすべて1以下であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} \sqrt{-p/3} \leq 1, \\ 0 \leq f(1) = 1 + p + q, \\ 0 \geq f(-1) = -1 - p + q \end{cases}$$

である. 第1の条件は $-3 \leq p \leq 0$ を意味するが, 第2と第3の条件より $p \geq -1$ が得られ, $D \geq 0$ より $p \leq h(q) \leq 0$ が得られるので, 第1条件は不要になる. したがって, 必要十分条件は $D \geq 0$ と合わせて

$$|q| - 1 \leq p \leq h(q) \quad (10)$$

となる.

2° $D < 0$ ($\Leftrightarrow p > h(q)$) のとき,

● 1つの実数解の絶対値が1以下であるための必要十分条件は, $f(1) \geq 0$, かつ, $f(-1) \leq 0$ であること, すなわち,

$$|q| - 1 \leq p \quad (11)$$

である.

● 共役複素解について考察する. Cardanoの解法に従って, 方程式 (6) の一つの解を $u + v$ として

$$u^3 + v^3 = -q, \quad 3uv = -p$$

と仮定する. このとき, u^3, v^3 を解とする2次方程式は

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

であって, その判別式は $q^2 + 4p^3/27 = -D/27 > 0$ であるから u^3, v^3 は実数となる. それぞれの実3乗根の和 $\gamma = u + v$ が方程式 (6) の実数解であり, 共役複素解 α, β は ω を1の複素3乗根として

$$\alpha = \omega u + \omega^2 v, \quad \beta = \omega^2 u + \omega v$$

となる. 2次方程式の場合と同様, 条件 $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ は $\alpha\beta \leq 1$ と同値である. そして,

$$\alpha\beta = u^2 + v^2 - uv = (u+v)^2 + p$$

であることと解と係数の関係 $\alpha\beta\gamma = -q$ により,

$$(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta(u+v))^2 + p(\alpha\beta)^2 = q^2 + p(\alpha\beta)^2$$

が成り立つ. すなわち, $s = \alpha\beta$ を解とする3次方程式

$$g(s) \stackrel{\text{def}}{=} s^3 - ps^2 - q^2 = 0$$

を得る. この方程式の実数解は1個¹であって, $\alpha\beta$ に限られる. さらに, $g(0) = -q^2 \leq 0$ であるから, $\alpha\beta \leq 1$ であるための必要十分条件は, $g(1) \geq 0$, すなわち,

$$p \leq 1 - q^2 \quad (12)$$

となる.

結局, 場合2°における必要十分条件は (11), (12) から,

$$h(q) < p, \quad \text{かつ, } |q| - 1 \leq p \leq 1 - q^2 \quad (13)$$

である.

場合1°の (10) と場合2°の (13) を合併するにあたり, 条件 (13) より $|q| \leq 1$ が得られ, 常に

$$h(q) \leq 1 - q^2$$

が成立することに注意すれば, 求めるべき必要十分条件として判別式 D や関数 $h(q)$ は不要になり, 最終的に

$$|q| - 1 \leq p \leq 1 - q^2 \quad (14)$$

を得る.

(証明終り)

¹ 方程式 $g(s) = 0$ の判別式は, 方程式 $g(s+p/3) = 0$, すなわち,

$$s^3 - \frac{p^2}{3}s - \left(q^2 + \frac{2p^3}{27}\right) = 0$$

の判別式に等しく, それは

$$-27\left(q^2 + \frac{2p^3}{27}\right)^2 - 4\left(-\frac{p^2}{3}\right)^3 = q^2 D < 0$$

となるからである.

領域 S の説明図における曲線の交点を確認しておくことは、一般の3次方程式を考察する上で役に立つ。

(1) 直線 $p = q - 1$ は曲線 $p = h(q)$ ($q \leq 0$) と点 $T^+ = (-3, -2)$ で接する。その接点は放物線 $p = 1 - q^2$ との交点でもある。放物線とは点 $E^+ = (0, 1)$ でも交わる。

(2) 直線 $p = -q - 1$ は曲線 $p = h(q)$ ($q \geq 0$) と点 $T^- = (-3, 2)$ で接する。その接点は放物線 $p = 1 - q^2$ との交点でもある。放物線とは点 $E^- = (0, -1)$ でも交わる。

(3) 曲線 $p = h(q)$ と直線 $p = \pm q - 1$ との2つの交点は、 $P^\pm = (-3/4, \pm 1/4)$ である (複号同順)。

2.2 一般の3次方程式の場合

定理 3 a, b, c を実係数とする3次方程式

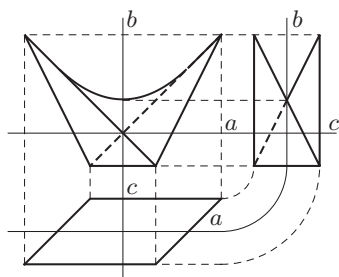
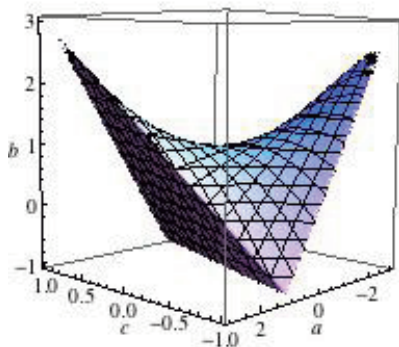
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (15)$$

の解の絶対値がすべて1以下となる (a, b, c) の領域は

$$S = \{(a, b, c) \mid |a| \leq 3, |a+c| - 1 \leq b \leq 1 + ac - c^2\} \quad (16)$$

である。

この領域 S は、2つの平面 $b = |a+c| - 1$ とねじれた双曲面 $b = 1 + ac - c^2$ で挟まれている。下図はその3次元グラフ表示である。参考に三面図を添える。



証明 基本的に前項と並行的であるが、前項の図における3次曲線 $D = 0$ 、放物線、2直線、および交点 T^\pm, P^\pm, E^\pm, Q の位置関係が a の値とともに変化する分、複雑になる。

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく。 $f(x)$ は平行移動 $x = y - a/3$ により、2次の項のない形

$$\begin{aligned} f(y - a/3) &= y^3 + py + q, \\ p &= b - \frac{a^2}{3}, \quad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} \end{aligned} \quad (17)$$

になる。その判別式 $D = -27q^2 - 4p^3$ に式 (17) を代入すると、方程式 (15) の判別式が次のように得られる：

$$\begin{aligned} D &= -27 \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} \right)^2 - 4 \left(b - \frac{a^2}{3} \right)^3 \\ &= a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2. \end{aligned} \quad (18)$$

1° $D \geq 0$ のとき

$a^2 \geq 3b$ であるから $f(x)$ は極値をもつ。解の絶対値がすべて1以下であるための必要十分条件は、前項と同様に

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{-a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}, & \frac{-a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3} \leq 1, \\ f(-1) \leq 0, & f(1) \geq 0 \end{cases}$$

であり、整理すると

$$\begin{cases} |2a| - 3 \leq b \leq \frac{a^2}{3}, & |a| \leq 3, \\ |a+c| - 1 \leq b \end{cases} \quad (19)$$

となる。前項と異なり、第1条件は無視できない。場合1°において必要十分条件を満たす (a, b, c) の領域は

$$A = \{(a, b, c) \mid |a| \leq 3, |2a| - 3 \leq b, |a+c| - 1 \leq b, D \geq 0\} \quad (20)$$

で与えられる。この領域 A と領域 S の関係はすぐにはわからないが、 $A = S \cap \{D \geq 0\}$ であることを後で示す。

2° $D < 0$ のとき

• 1つの実数解の絶対値が1以下である必要十分条件は

$$f(-1) \geq 0, f(1) \leq 0, \quad \text{すなわち, } |a+c| - 1 \leq b \quad (21)$$

である。

• 共役複素数解 α, β を考察する。式 (17) の p, q を用いて方程式 $y^3 + py + q = 0$ に前項と同様、Cardanoの解法を適用する。方程式 (15) の解は

$$\alpha = \omega u + \omega^2 v - \frac{a}{3}, \quad \beta = \omega^2 u + \omega v - \frac{a}{3}, \quad \gamma = u + v - \frac{a}{3}$$

であり、 $\alpha\beta = (u+v)^2 + \frac{a}{3}(u+v) + b - \frac{2a^2}{9}$ より $s = \alpha\beta$ に関する3次方程式

$$g(s) \stackrel{\text{def}}{=} s^3 - bs^2 + acs - c^2 = 0$$

が得られ, その実数解は1個²であり, $\alpha\beta$ に限られる. さらに, $g(0) < 0$ であるので, $\alpha\beta \leq 1$ であるための必要十分条件は, $g(1) \geq 0$, すなわち, 次の不等式となる:

$$1 - b + ac - c^2 \geq 0. \quad (22)$$

結局, 場合2°における必要十分条件を満たす (a, b, c) の領域は, (21) と (22) により,

$$B = \{(a, b, c) \mid |a+c| - 1 \leq b \leq 1 + ac - c^2, D < 0\} \quad (23)$$

で与えられる. この領域 B と領域 S の関係はすぐにはわからないが, $B = S \cap \{D < 0\}$ であることを後で示す.

残る問題解決のため, a -断面である bc -平面上の領域

$$\begin{aligned} S(a) &= \{(b, c) \mid |a+c| - 1 \leq b \leq 1 + ac - c^2\}, \\ A(a) &= \{(b, c) \mid |2a| - 3 \leq b, |a+c| - 1 \leq b, D \geq 0\}, \\ B(a) &= \{(b, c) \mid |a+c| - 1 \leq b \leq 1 + ac - c^2, D < 0\} \end{aligned}$$

を考察し, $|a| \leq 3$ のとき $A(a) = S(a) \cap \{D \geq 0\}$ であること, $|a| > 3$ のとき $B(a) = \phi$ であることを示す.

以下, 同一文中の複号 \pm , \mp は同順とする.

- 曲線 $b = 1 + ac - c^2$ は $(1 + a^2/4, a/2)$ を頂点とする右に凸の放物線である.
- 2直線 $b = \pm(c+a) - 1$ は交点 $Q = (-1, -a)$ で直交し, $b = |a+c| - 1$ は Q で折れる左に凸の折れ線を表す.
- 3次曲線 $D = 0$ は2つの分枝

$$c = D^\pm(b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{3}b - 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 \pm \frac{2}{27}\sqrt{(a^2 - 3b)^3} \quad (24)$$

をもつ. $D^+(b)$ は下に凸, $D^-(b)$ は上に凸³の滑らかな一価関数で, 定義域は $b \leq a^2/3$ である. 2曲線は尖点

$$C = \left(\frac{a^2}{3}, \left(\frac{a}{3}\right)^3\right) \quad (25)$$

から分岐する.

- $\{D \geq 0\}$ と略記した領域は, bc -平面上では

$$\{(b, c) \mid b \leq \frac{a^2}{3}, D^-(b) \leq c \leq D^+(b)\}$$

であり, 領域 $\{D < 0\}$ はその補集合である.

- $|a| \leq 3$ のとき, 尖点 C の座標 (25) は不等式

$$|a+c| - 1 \leq b \leq 1 + ac - c^2$$

² 方程式 $g(s) = 0$ の判別式は方程式 $g(s+b/3) = 0$, すなわち,

$$s^3 + \left(ac - \frac{b^2}{3}\right)s + \left(\frac{abc}{3} - \frac{2b^3}{27} - c^2\right) = 0$$

の判別式と同じで, それが $c^2 D (< 0)$ に等しいからである.

³ $\frac{d^2}{db^2} D^\pm(b) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{a^2 - 3b}}$ であるから.

を満たすので, C は領域 $S(a)$ に含まれる. したがって, このとき $S(a)$ は C から伸びる曲線 $c = D^\pm(b)$ によって2つの領域に分割される.

- 直線 $b = \pm(c+a) - 1$ と放物線の交点は次の2点である:

$$E^\pm = (\pm a, \pm 1) \quad \text{と} \quad T^\pm = (\pm 2a - 3, a \mp 2).$$

- 直線 $b = \pm(c+a) - 1$ は曲線 $D = 0$ と点 T^\pm で接し, 点

$$P^\pm = \left(\frac{(a \pm 1)^2}{4} - 1, \pm \frac{(a \mp 1)^2}{4}\right)$$

で交わる. $|a| \leq 3$ のとき接点 T^\pm は $c = D^\mp(b)$ 上にあり, 交点 P^\pm は $c = D^\pm(b)$ 上にある⁴.

- 放物線は曲線 $D = 0$ と点 T^\pm で交わる⁵.

以下, a の値による領域の変化を記す.

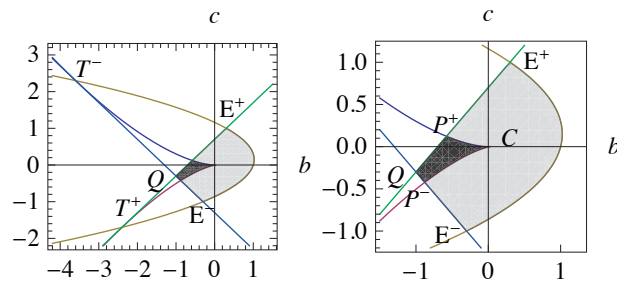
- $|a| \leq 1$ のとき

領域 $S(a)$ の境界をなす放物線と折れ線 $b = |a+c| - 1$ は点 E^\pm で交差する. $S(a)$ 内の点 C から分岐する2曲線 $c = D^\pm(b)$ は折れ線と点 P^\pm で交差する.

したがって, 点 Q, P^\pm, C は領域 $A(a)$ の境界の4隅にあり, Q の b 座標は条件 $|2a| - 3 \leq b$ を満たすので, $A(a) = S(a) \cap \{D \geq 0\}$ である.

とくに $a = \pm 1$ のとき, 4点 Q, P^\mp, E^\mp, T^\pm は一致する.

参考図 $a = 0.3$ のとき, グレイと黒の領域が $S(a)$, 黒い領域が $A(a)$ である. 右はその拡大図.



- $1 < |a| \leq 3$ のとき

a の符号が \pm のとき, 領域 $S(a)$ の境界をなす放物線は他方の境界をなす直線 $b = \pm(a+c) - 1$ と点 E^\pm, T^\pm で交差し, 点 P^\pm はこの2点の間に位置する. このとき

⁴ $|a| > 3$ のときはそれと異なる配置となる.

⁵ D に $b = 1 + ac - c^2$ を代入すると

$$D = (c-2-a)(c+2-a)(2c^2 - ac + 1)^2$$

と因数分解されるから, 放物線 $b = 1 + ac - c^2$ は曲線 $D = 0$ と2つの交点 T^\pm をもつ. $|a| \geq \sqrt{8}$ のときはさらに2つの接点

$$\left(\frac{1}{8}(12 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 8}), \frac{1}{4}(a \mp \sqrt{a^2 - 8})\right) \quad (\text{複号同順})$$

をもつが, その b 座標について $\sqrt{8} \leq |a| < 3$ のとき

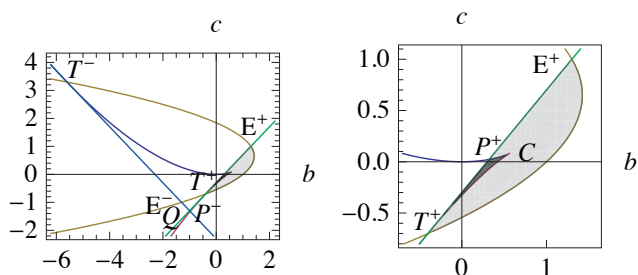
$$\frac{1}{8}(12 + a^2 + |a|\sqrt{a^2 - 8}) < |2a| - 3$$

であるから2接点とも領域 $S(a)$ の外にあり, 最終結果に影響しない.

点 T^\pm の b 座標は $|2a| - 3$ であるから、条件 $|2a| - 3 \leq b$ を満たすべき領域 $A(a)$ は T^\pm, P^\pm, Q を境界の3隅として、 $A(a) = S(a) \cap \{D \geq 0\}$ となる。

とくに $|a| = 3$ のとき、4点 C, E^\pm, P^\pm, T^\pm が一致し、 $S(a)$ は1点 $\{(3, \pm 1)\}$ になる。

参考図 $a = 1.3$ のとき、グレイと黒の領域が $S(a)$ 、黒い領域が $A(a)$ である。右はその拡大図。



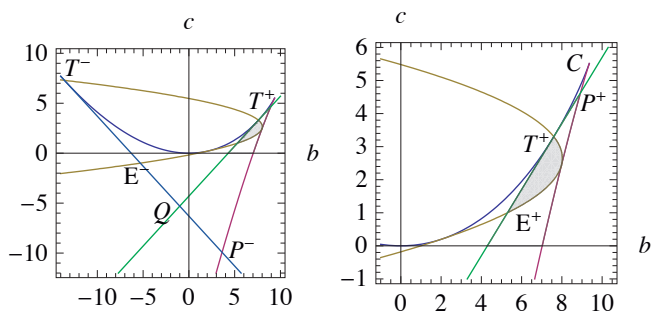
• $|a| > 3$ のとき

$|a| = 3$ のときに面積が0となった領域 $S(a)$ は再び広がりをもつが、座標 (25) は

$$|a+c| - 1 < b, \quad b > 1 + ac - c^2$$

となるので点 C は領域 $S(a)$ の外に出る。 a の符号を \pm とすると、領域 $S(a)$ の境界をなす放物線は他方の境界である直線 $b = \pm(a+c) - 1$ と点 E^\pm, T^\pm で交差し、点 P^\pm は線分 $E^\pm T^\pm$ の延長線上に位置する。曲線 $c = D^\pm(b)$ が点 T^\pm でこの直線に接し、曲線 $c = D^\mp(b)$ が点 T^\pm で放物線に接するので、 $S(a)$ は領域 $\{D \geq 0\}$ に含まれる。したがって、 $|a| > 3$ のとき $B(a) = S(a) \cap \{D < 0\} = \phi$ となる。

参考図 $a = 5.3$ のとき、グレイの領域が $S(a)$ で、右はその拡大図。この領域は A にも B にも含まれない。



以上により、

$$\begin{cases} A = \bigcup_{|a| \leq 3} \{a\} \times A(a) = S \cap \{D \geq 0\}, \\ B = \bigcup_{|a| \leq 3} \{a\} \times B(a) = S \cap \{D < 0\} \end{cases}$$

が示され、 $A \cup B = S$ の証明が完結した。(証明終り)

2.3 余談

(1) 領域 S は変数変換

$$a = (3d - e)/\sqrt{2}, \quad c = (d + e)/\sqrt{2}$$

を施すと、もっと単純な形式

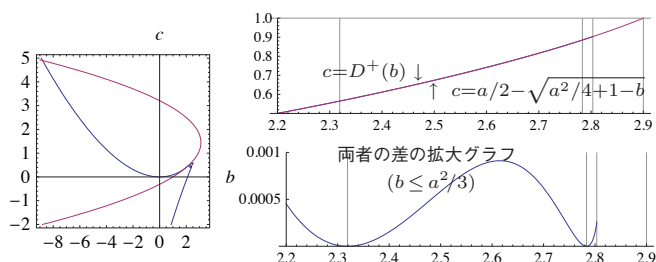
$$|d| \leq \sqrt{2}, \quad \sqrt{8}|d| - 1 \leq b \leq 1 + d^2 - e^2$$

で表現できる ($|e| \leq \sqrt{2}, -1 \leq b \leq 3$) .

(2) 脚注 [5] に述べたように、3次曲線 $D = 0$ と放物線 $b = 1 - ac - c^2$ は $|a| > \sqrt{8}$ のとき、2個の交点以外に2個の接点をもつ。例えば $a = 2.9$ の場合、2つの曲線

$$c = D^+(b), \quad c = a/2 - \sqrt{a^2/4 + 1 - b}$$

のグラフは下図のように極めて近接する (右は $2.2 \leq b \leq 2.9$ の範囲の拡大図)。ともに下に凸の滑らかな曲線であるが、曲率の微妙な違いのため近いところ ($b = 2.319, 2.783$) で2回接していることが、差を拡大するとよくわかる。



3 定理の簡単な拡張

「方程式の解の絶対値がすべて定数 $\mu (> 0)$ 以下」という条件にした場合、変数 x を x/μ で置き換えれば上記の定理に帰着されるので、容易に次の結果が得られる。

系 (1) p, q を実数とする2次方程式

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p, q: \text{実数})$$

の解の絶対値がすべて μ 以下となる (p, q) の領域 S_μ は

$$S_\mu = \{(p, q) \mid \mu|p| - 1 \leq \mu^2 q \leq 1\}$$

である。

(2) a, b, c を実数とする3次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

の解の絶対値がすべて μ 以下となる (a, b, c) の領域 S_μ は

$$S_\mu = \{(a, b, c) \mid \mu|a| \leq 3, \mu|a + \mu^2 c| - 1 \leq \mu^2 b \leq 1 + \mu^4 ac - \mu^6 c^2\}$$

である。

4 高次方程式への挑戦

4次方程式に関して同様の問題が考えられるが、まだ挑戦を試みていない。

5次以上の高次方程式の解の公式が存在しないことはよく知られているが、解の絶対値がすべて1以下である必要十分条件を求めることはまた別の問題である。

しかし、4次、5次、... と追いかけても複雑になるだけであろう。 n 次方程式の解の絶対値の大きさについて一般に成り立つ命題は何かと問うと、なかなか難しい。

あとがき

得られた結果は単純であるが、証明にはちょっと手がかかった。冗長だが2次の項のない場合を先に記して、記述する上での困難を分割した。Cardanoの解法以外は高校の数学IIIの範囲で解決できている。

もっとエレガントな証明があってもよさそうであるが、文献を調べることなく得たままを記した。この問題の解がすでに知られていることは十分にあり得る。

当然、行列の固有値問題として考察することができる。この件に関して分かっていることを確認する必要がある。

解の絶対値がすべて1以下という条件は、複素平面で考えれば解が単位円の内部にあることを意味する。関数論からのアプローチがあるかどうか、これもまだ吟味していない。

参考文献

[1] デイヴィッド A. コックス (梶原 健 訳):「ガロワ理論 上, 下」, 日本評論社, 2008.

以上