ARMA 時系列モデルの当てはめについて
—故青木憲二先生を偲んで—

On the ARMA time series model fittings
—Recalling the deceased professor Kenji Aoki－

ネットワーク情報学部　田中　稔
School of Network and Information　Minoru Tanaka

Keywords: ARMA(1,1) model fitting, AR(2) model, misspecification

Abstract

This paper gives a discussion on a misspecified ARMA(1,1) model fitting to an AR(2) process. The problem concerning a number of globally and locally maximal points of the conditional likelihood function is investigated when the sample size tends to infinity.

.

はじめに

この論文は、1991 年に情報科学研究 No.12 において故青木憲二先生と投稿した「移動平均時系列モデルの当てはめについて」の続編である。20 数年前に彼と議論しながら、その論文を作成したことを思い出す。私の研究分野は時系列解析であるが、彼はデータ解析とは無縁な幾何学者であった。私が時系列モデルの misspecification（誤識別）に関して研究していた頃、複雑な関数の最小化問題に行き詰まっていた。ふと彼に話したところ、幾何学の方でも関数の条件付き極値問題の話題（カタストロフィー理論）があるという。「その問題はどんな関数なの？」、これが始まりであった。

時系列解析では時系列データに適当な線形モデルを当てはめ、そのモデルを使って、将来の値を予測することを主な目的とする。データにモデルを当てはめる際、モデルのパラメータを推定することになるが、そのために確率分布を仮定し、モデルの尤度関数を最大にする最尤法が一般に使われる。分布の正規性の仮定の下で標本が大きい場合には、これはモデルの残差平方和を最小にする最小自乗法と一致する。当てはめたモデルが正しい場合にはその推定量は良い性質を持つことが研究されているが、もしモデルが正しくない場合にはそれがどんな性質を持つか等については余り詳しく研究されていない。モデルが正しいとか正しくないとかに関する現実的な疑問は存在する。もしかしたらそれは数学的にだけ意味をもつ問題なのかもしれない。その意味で彼と私は数学者だったのだろう。

当時の研究対象であった最小自乗平均関数 S は MA(1) パラメータを x（$-1<x<1$）とし、真のモデルが定常 AR(2) モデルの場合である。AR 係数パラメータは a1, a2 で定常性の条件 R0（逆三角形）; $\{0<(a2+a1+1)(a2-a1+1),\ -2<a1<2,\ -1<a2<1\}$, を満たすとき、関数 S は次の式で与えられる。

$$S(x\,;\,a1,\,a2) = \frac{1+a2-a1(1-a2)x-a2(1+a2)x^2}{(1-a2)(1-a1^2+2a2+a2^2)(1-x^2)(1+a1x+a2x^2)}.$$

特殊な AR モデルの場合に関数 S は、最小値（極小値）が 2 つ存在することがある。例えば、{a1, a2} = {0, 0.6} の場合では関数 S は下図のようなグラフを持つ。

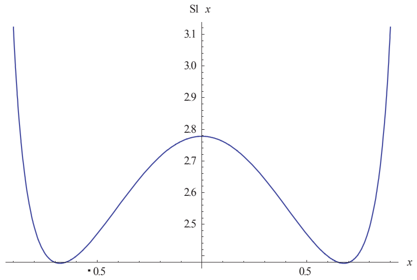

図１． 関数 S(x；0, 0.6) のグラフ

このようなケースを特定化するのがわれわれの研究の目的であった。

青木先生との研究の成果としては、関数 S(x) の１回微分 DS(x) の分子の関数とその微分の関数との終結式を計算し、$DS(x) = 0$ となる解が３つから２つに変化する場合を特定化した。すなわち終結式([5])の値がゼロとなる等高線を定式化して、それを下図のようにグラフ化することができた。図２の上部にあるくさび状の曲線で囲まれた色の濃い部分の領域（R1）が我々の求めていたものである。

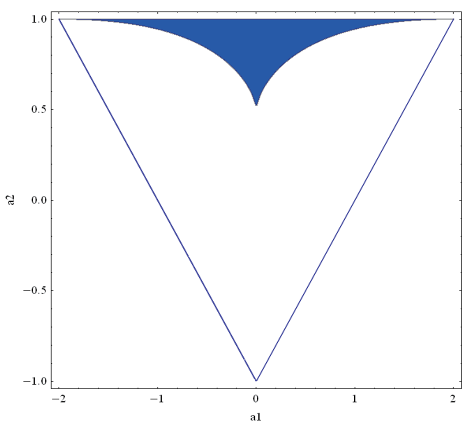

図２． AR 係数パラメータ{a1, a2} 空間

また、青木氏はカタストロフィー理論のカスプの概念を使って、実際には図２のくさびの内側の領域 R1 で関数 S(x) が２つの極小点をもち、くさび上では１つの極小点と１つの変曲点、更にくさびの先端ではそれらが合わさって１つの極小点（最小点）のみをもつことを明らかにしたのであった（詳しくは情報科学研究 No.12, [2], 及び[1] , [4] を参照のこと）。

ARMA(1,1)モデルの当てはめについて

ここでは、当てはめるモデルを拡張して、自己回帰移動平均 ARMA(1,1) について同様な問題を考えてみる。時系列 {Z(t)} が ARMA(1,1) モデルに従うとは

$$Z(t) + x\,Z(t-1) = e(t) - y\,e(t\text{-}1), \quad \text{where}$$

$$Var(e(t)) = 1.0,$$

となるホワイトノイズ $e(t)$ が存在することである。ここで、x と y は AR と MA パラメータである。このモデルは特殊な場合($x = 0$) である ARMA(0,1) が MA(1) モデルとなる。AR(2) 過程に従う時系列データをこの ARMA(1,1) モデルに当てはめた場合に得られる最小自乗平均関数は次の式で与えられる（参考文献[3]）。

$$S2(x, y\,;\, a1, a2\,) = \frac{A}{B}, \quad \text{where}$$

$$\begin{aligned} A = {} & 1 + a2 - 2a1x + (1 + a2)x^2 + (-a1(1 - a2) \\ & +2(1 - a2^2)x - a1(1 - a2)x^2)y \\ & -a2(1 + a2 - 2a1x + (1 + a2)x^2)y^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = {} & (1 - a2)(1 - a1^2 + 2a2 + a2^2)\cdot \\ & (1 - y^2)(1 + a1y + a2y^2). \end{aligned}$$

前回と同様な考え方で、関数 S2 の極小点の数に注目する。すなわち、x 及び y に関する２つの偏微分係数が０となる方程式の解とその分子の微分係数が０となる方程式の解が一致する条件を求める。これらの２つの式の終結式（D2）を数式処理ソフトの Mathematica で計算すると、

$$\begin{aligned} D2 = {} & (-1 + a1 - a2)^2(-1 + a2)^2 a2^{16}(1 + a2)\cdot \\ & (a1 - a2 - a2^2)^2(a1 + a2 + a2^2)^2\ \cdot \\ & - 288a1^2a2^2 - 27a1^4a2^2 + 512a2^3 + 256a2^4). \end{aligned}$$

が得られる。このとき方程式 $D2 = 0$ となる曲線から、関数 S2(x,y) が極小点を２つ持つ領域 R2 は下図となることがわかる。

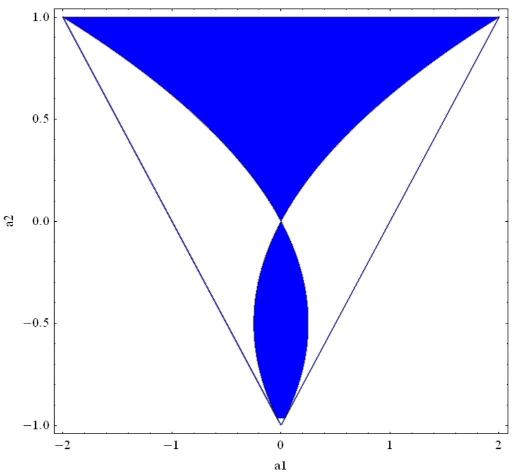

図 3．AR 係数パラメータ{a1, a2} 空間

これは、関数（$(a1\text{-}a2\text{-}a2^2)(a1+a2+a2^2)$）が零の値となる等高線である。 曲線で囲まれた色の濃い部分の 2 つの領域（R2）で関数 S2(x,y) は極小点を 2 つ持つことがわかる。前回のくさび状の領域が大きく下がり、その下に雫状の領域が加わっている。さらに Mathematica(V.9) を使って数値積分を行うと、この領域 R2 の面積は 2.0 となり、下三角形のパラメータ空間に対する割合はちょうど 50%となることがわかる。前回のくさび状の領域 R 1 の面積が約 0.70（17.6%）であることより凡そ 3 倍近く極小点が 2 つになる領域が拡大したことになる。

具体的な例として、代表的な 4 つの領域にある AR パラメータ｛a1, a2｝をもつ関数 S2(x,y) のグラフの断面図を以下に示す。

(1) ｛a1, a2｝=｛0.0, －0.5｝(R2 内）の場合：
S2(x,y) は図 4 より極小点を 2 つ持つことがわかる。

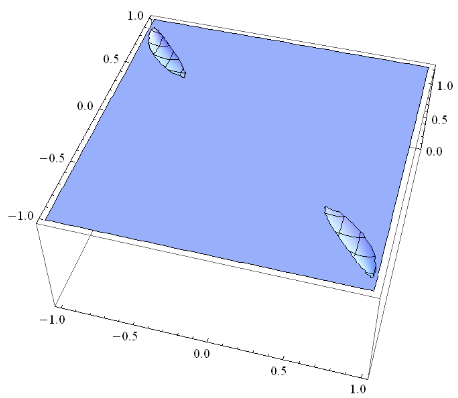

図 4．S2(x,y) のグラフの断面図

(2) {a1 , a2 } = { 0.0, 0.8 }（R2 内、双峰）の場合：
S2(x,y) は図 5 より極小点を 2 つ持つことがわかる。

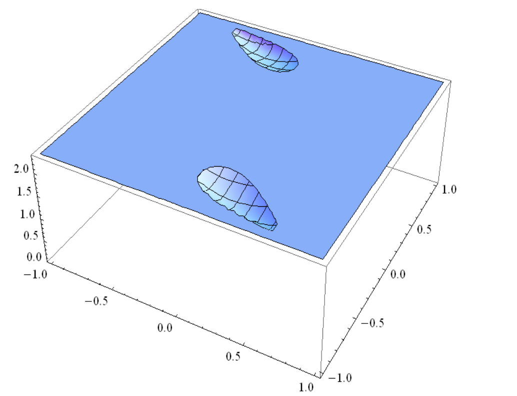

図 5．S2(x,y)のグラフの断面図

(3) {a1 , a2 } = {－1.0, 0.9 }（R2 内）の場合：
S2(x,y) は図 6 より極小点を 2 つ持つことがわかる。

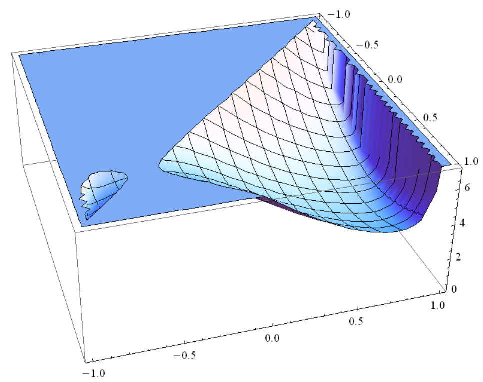

図 6．S2(x,y) のグラフの断面図

(4) {a1 , a2 } = {1.0, 0.1 }（R2 外）の場合：
S2(x,y) は図 7 より極小点を 1 つ持つことがわかる。
同様にして、AR 係数パラメータ{a1, a2} が領域 R2 の外にある{a1 , a2 } = {－1.0, 0.1 } の場合にも同様なグラフが得られる。

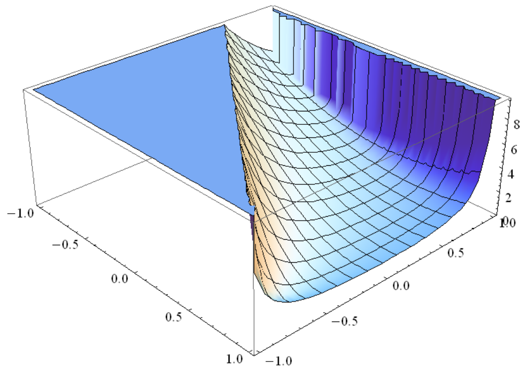

図 7. S2(x,y) のグラフの断面図

結果

予想に反して、MA(1) モデルの場合と比較すると ARMA(1,1) モデルでは最小自乗平均関数 S2 の極小点が 2 つ存在する領域が広がっていることがわかる。モデルを拡張すれば「モデルの許容範囲」が増えそうであるが、この種のモデルでは逆に狭まっていることになる。今回のような簡単なモデルでは、極小点は高々2 つであることがわかっているので最小点が求まるが、一般には極小点の数は未定である。従って、目的関数の極小点が複数存在すると、非線形計画法による計算は初期値に大きく依存し収束しないこともあるため、最小自乗法によるモデルのパラメータ推定はうまくできない。

今回の結果が一般の定常 ARMA モデルにも当てはまると仮定すると、実際のデータ解析に於いて時系列データに定常 ARMA モデルを当てはめるときには、しばしばそのパラメータの推定値の候補が複数存在してうまく推定できないことが想像される。一方、ARMA(1,1) モデルは誤識別に関して MA(1) モデルより「敏感である」ことを意味している。 従って、モデルのパラメータ推定でこのような現象が現れたら、当てはめたモデルは真のモデルと異なっていることを主張していると考え、即座にその当てはめたモデルを変更すべきであろう。

終わりに

今回の研究を振り返って、青木先生による幾何学的手法から学ぶことが多いことに気づく。生前、彼から「この間の論文の続きをまたやりましょう」と幾度となくアドバイスされたことを思い出す。当時は私の研究テーマが変わってしまい、それが実現できなかった。今更ながら残念である。数理統計学と幾何学がコラボして、もしかしたら複雑なモデルの解析に挑戦することから新しい概念が構築できたのかもしれない。これを契機にこの分野の研究に立ち返り、青木先生の代わりに幾何学も勉強し我々の研究を発展させたいと思う次第である。尚、ここで述べた結果の詳細は、情報科学研究所の欧文誌に掲載する予定である。

参考文献

[1] 小野俊夫　1999　経済動態の複雑性　学文社
[2] 田中稔，青木憲二　1991　移動平均時系列モデルの当てはめについて　Bulletin of the Institute of Information Science 12, 42-54
[3] M.Tanaka, M.Huzii 1992 Some properties of moving-average model fittings, J. Japan Statist. Soc. Vol.22 No.1 33-44
[4] ボストン，スチュアート　1982　カタストロフィー理論とその応用　サイエンス社