ゲームと確率

Games and Probabilities

ネットワーク情報学部　石鎚英也

School of Network and Information　Hideya ISHIZUCHI

Keywords: game, gambling, probability

1. はじめに

時代劇には「丁半」と呼ばれる博打が登場します．これは、2 つのサイコロを壺の中で振り、目の和が偶数（丁）か奇数（半）かを当てるという簡単なルールのゲームですが、丁の方が出やすいという迷信があったということです．2 つの目の和は 2〜12 の値になりますが、「偶数となるのは 2, 4, 6, 8, 10, 12 の 6 通りであるのに対して、奇数となるのは 3, 5, 7, 9, 11 の 5 通りしかない」というのがその根拠とされます．

よく知られているように、2 個のさいころの目を並べて、1-1, 1-2, …, 6-5, 6-6 のように 36 通りを列挙[1]し、そのどの場合も生起する頻度が同じであること、また、目の和が偶数、奇数になるのは 18 通りずつであることが分かれば、こうした誤解は生じないでしょう．しかし、確率がらみの話では、一見するともっともらしく見える推論が実は誤解であるということが案外多いのは、現在のわれわれも同様であろうと思われます[2]．

以下では、知的なゲーム（特に賭けごと）を例に、確率的な判断におけるこうした誤りやすい事項を、高校数学の復習も兼ねて、いくつか示したいと思います．古くから賭けごとと確率（論）との関連は深く、歴史上の有名な話を含めた問題形式にしています．考える時間を少しずつ取りながら読み進めてください．

[1] 2 つのサイコロの目（1〜6）を行と列にして、対応する和を九九の表のように書けば、より分かりやすいでしょう．

[2] パラドックスと呼ばれるような状況が典型的ですが、条件付確率が関連するケースなどでも、状況設定の微妙な違いから誤解を生ずることがあります．例えば、テレビ番組に端を発する「モンティ・ホール問題」（Monty Hall problem）やそれに関する論争（例えば[4]）を参照．

2. 賭けと勝率

最初のゲームです．

> 【ゲーム 1】（偏りのない）サイコロを使った 2 種類のゲームがあります．あなたはどちらのゲームに参加しますか？
>
> ①　1 個のサイコロを 4 回投げて、6 の目が 1 回でも出ればあなたの勝ち
>
> ②　2 個のサイコロを 24 回投げて、2 個とも 6 の目（6 のぞろ目）になることが 1 回でもあればあなたの勝ち

次のような（誤った）考え方がありますが、みなさんの見解はいかがでしょうか：「①1 個のサイコロを 1 回投げて 6 の目が出る確率は $1/6$ で、これは勝つチャンスを示している．4 回投げられるのだから、勝つチャンスは $4\times 1/6 = 2/3$ だけある．②2 個のサイコロを 1 回投げて 2 個とも 6 の目が出る確率は $1/6\times 1/6 = 1/36$ で、24 回投げられるのだから、勝つチャンスは $24\times 1/36 = 2/3$ だけある．①②は勝つチャンスが同じなので、どちらのゲームも同じはずだ．」

これは、シュヴァリエ・ド・メレ[3]（Chevalier de Méré）というフランスの作家が、数学者・哲学者であるパスカル（Blaise Pascal）に相談したとされる有名な問題の 1

[3] フランス語の Chevalier はナイト（Knight）の意味なので、貴族とみなされることがありますが、これは著作中の人物に由来した俗称で、本名の Antoine Gombaud に代わって定着したもののようです．

つです[4]（表現や状況設定は変更しています）．ド・メレは、①では勝てていたのに②では勝てなくなった理由について問うています．

では、これらのゲームの勝率（＝勝つ確率）を計算してみましょう．①では 6 の目が 1 回以上出れば勝ちですが、直接計算するのは、場合の数が多くなって複雑になります．そこで、通常は、余事象である負けの確率を求め、それを 1 から差し引いて勝率を求めます．負けとなるのは 4 回とも 6 以外の目が出る場合（確率 $(5/6)^4$ ）なので、勝率は

$$1-(5/6)^4 = 1-625/1296 = 671/1296 \approx 0.519$$

と計算されます．

同様に、②では、負けとなるのは 24 回とも 6 のぞろ目以外となる場合（確率 $(35/36)^{24}$ ）なので、勝率は

$$1-(35/36)^{24} \approx 1-0.5086 = 0.4914$$

となります．多数回ゲームを続ければ、トータルで、①では勝ち、②では負ける可能性が高いことが分かります．

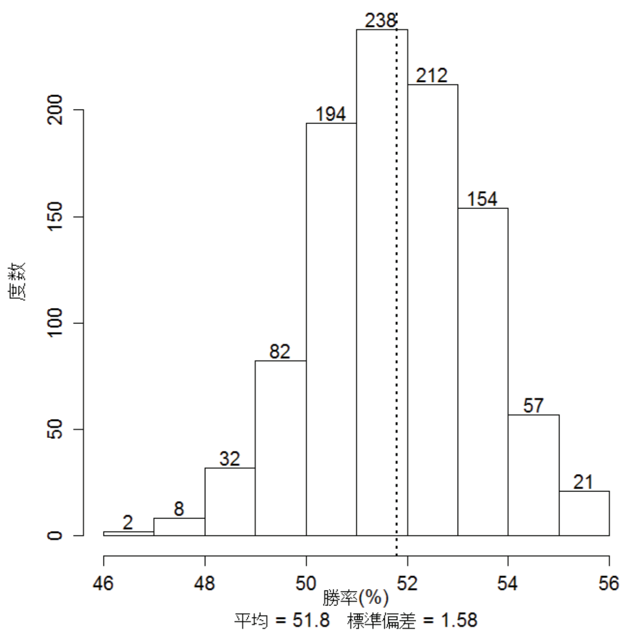

図 1　勝率の分布①

[4] 「何かの理由で賭けが中断されたときに、そこまでの結果から賭け金をどう配分すればよいかと」いう問題もあります．

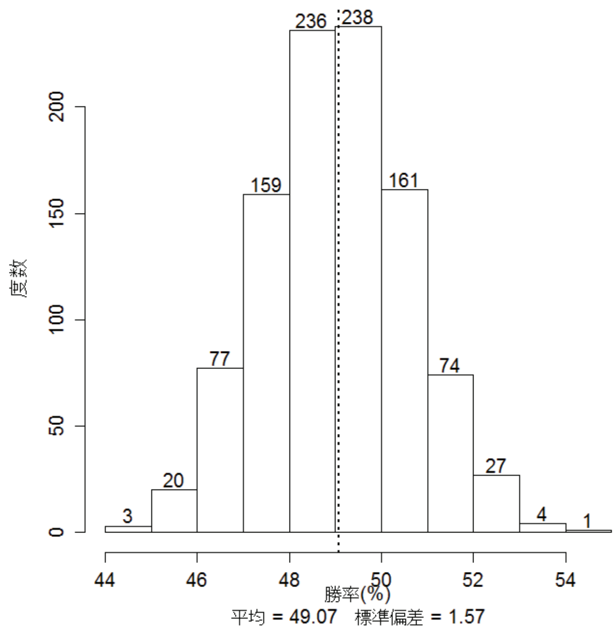

図 2　勝率の分布②

1000 人の参加者が、①と②にそれぞれ 1000 回参加したときを想定し、各人の勝率をシミュレートした結果を図 1 と図 2 に示します[5]．図の中の垂直な破線は、それぞれの勝率分布の標本平均を示しています．①では、平均勝率が約 51.8%（標準偏差は約 1.58%）、②では平均勝率が約 49.1%（標準偏差は約 1.57%）で、先ほどの計算とほぼ一致しています．

勝負では、字義通り勝ったり負けたりするのが常．以下では、実力を評価する平均勝率について考えてみます．

【ゲーム 2】あるゲームの大会では、1 日かけて対戦が行われ、勝率によって参加者の順位がつけられます．引き分けはなく、参加者は合計 110 回の対戦を行います．参加者のうちの 2 人（A、B）の結果は以下の通りでした：
・午前の勝率…A さん 60%、B さん 90%．
・午後の勝率…A さん 10%、B さん 30%．
いずれも B さんの勝率が A さんを上回りましたが、順位は A さんの方が上でした．なぜでしょうか？

[5] ①については、サイコロ 4 回のランダムな試行（1 セット）から勝敗が 1 つ決められます．1000 セット（＝1 人分）の勝敗から勝率を 1 つ求めます．これを 1000 人分繰り返した勝率の分布です．②についても、24 回のランダムな試行を 1 セットとして同様に行いました．

「勝率＝勝った回数÷対戦回数」[6]であることと、「参加者の対戦回数が同じ（110 回）」であることから、A さんの順位が B さんを上回ったというのは、A さんのトータルでの勝率が高い（あるいは勝った回数が多い）はずだということになります．そのような事態があるとすれば、どういう場合でしょうか. 例をあげてみましょう（表 1）．表の中の分数は、分母が対戦回数、分子が勝った回数を示します．極端なケースではありますが、問題文の全ての条件が満たされていることを確認してください．

表 1　成績の例

参加者	午前	午後	合計
A	$60/100$	$1/10$	$61/110 \approx 0.55$
B	$9/10$	$30/100$	$39/110 \approx 0.35$

これは、シンプソンのパラドックス[7]（Simpson's paradox）と呼ばれる現象の 1 つで、「部分的に言えることと全体として言えることは異なる（全体は部分の単純な寄せ集めではない）」といったシステム的な意味で興味深いと思います. これは現実社会でも起こり得ることで、例えば、[2]には、腎臓結石の治療や野球の打率の実例などが紹介されています.

では、次のゲームに進みましょう.

【ゲーム 3】ある人が同じ種類の（引き分けのない）ゲームの 2 つの大会（A と B）で何度も試合に参加したところ、勝率が、それぞれ 0.4 と 0.6 だったといいます．A、B ともに勝った回数は同じだったとのことですが、この人の実力（平均勝率）はどの程度でしょうか？

$(0.4+0.6)/2=0.5$ などという早合点さえしなければ、これは易しい問題でしょう．各大会で勝った回数が x 回ずつとすれば、A と B の試合への参加回数は、それぞれ $x/0.4=5x/2$ 回、$x/0.6=5x/3$ 回となります[8]．参加総数 $5x/2+5x/3=25x/6$ 回のうち $2x$ 回勝ったわけですから、勝率は $\dfrac{2x}{25x/6}=\dfrac{12}{25}=0.48$ です.

これは、2 つの勝率の調和平均 $\left((0.4^{-1}+0.6^{-1})/2\right)^{-1}$ を意味しています.「比率（この問題では勝率）の平均の計算には注意せよ」というのがここでの教訓です．勿論、A、B ともに試合の参加回数が同じという場合だと、平均勝率は各勝率の相加平均になりますし、A、B の試合参加回数がそれぞれ a,b だと、$a/(a+b), b/(a+b)$ を重みとする加重（相加）平均になります.

応用問題として、次の問題を考えてみてください（解説は「付録 1」参照）:「A 社のエコカーの燃費はガソリン 1ℓ あたり 20km、B 社の燃費はガソリン 1ℓ あたり 30km です．両社の生産台数は、それぞれ 10 万台と 20 万台です．これらのエコカー1 台あたりの平均燃費はいくらでしょうか.」

3. 賭けの期待値

賭けのゲーム（あるいは賭けの方法）が 2 つあって、どちらか 1 つだけに参加（あるいは採用）するとしましょう．この場合、必ずしも勝率が高い方が有利だとは限りません（小さくたくさん勝つより、あまり勝てなくても勝った時の利得が大きい方が良いかも知れない). ここでは、賭けの期待値について考えてみましょう.

【ゲーム 4】偏りのないコインを表が出るまで投げ続け、n 回目に初めて表が出れば 2^n 円もらえます．ゲームの参加料が 1 円ならあなたは参加しますか？また、参加料が 10 円、100 円、1000 円、1 万円、…ならどうでしょうか？

これは、「サンクトペテルブルクのパラドックス」（例えば[3][6]を参照）と呼ばれる有名なパラドックスの一例です.

得られる金額を具体的に書けば、1 回目に初めて表が

---

6 引き分けがある場合には、その取り扱いがゲームのルール上問題となります．勝率の計算法も複数考えられるので、その定義次第で順位が変わることもあります.

7 本来は、相関に関する現象です．例えば、ある 2 変量について、各グループ内では正の相関があるのに、グループをまとめると負の相関になるといったことがあり得ます．Simpson は 1951 年の論文でこのような現象を記述しましたが､それ以前にも Karl Pearson や Udny Yule が同様の現象に言及しています（[2]を参照).

8 より現実的には、A、B への参加回数は自然数なので、x は 6 の倍数（かつ正）でなければなりません. 従って、勝ち回数 $x=6$ として、A に 15 回、B に 10 回というのが最小の参加回数となります.

出たときは $2^1=2$ 円、2 回目に初めて表が出れば $2^2=4$ 円、3 回目に初めて表が出れば $2^3=8$ 円…なので、表 2 のような金額になります．例えば、$n=10$ だと 1024 円、$n=20$ だと 104 万 8576 円にもなります[9]．

表 2　回数と金額

n	1	2	3	4	5	6	7	…	∞
2^n	2	4	8	16	32	64	128	…	∞

勿論大きな金額が得られる確率は低くなります．$n=1$ となるのは 1 回目に表が出る場合なので、その確率 p_1 は $p_1=1/2$ ですが、$n=2$ となるのは 1 回目に裏が出て、2 回目に表が出る場合なので、その確率 p_2 は $p_2=1/2\times 1/2=(1/2)^2$ です．同様にして、一般に n 回目に初めて表が出る確率 p_n は $p_n=(1/2)^n=1/2^n$ となります．

ゲームに参加するかどうかは、参加した場合の利益の期待値を求め、期待値が正（つまり、参加しない場合の利益の期待値 0 より大）だと参加し、期待値が負だと参加しないと判断することが通例です．このような、いくつかの案の中から、利益の期待値が最大となる（あるいは損失の期待値が最小となる）案を採択せよという方法・指針を期待値原理と呼ぶことがあります．

ゲーム 3 で実際に生じる n（最初に表が出る回数）は、表がいつ出るか不明なので、いくらでも大きくなる可能性がありますが 1、2、3、…のいずれか 1 つ[10]なので、利益の期待値は、参加料を c とすると $\sum_{n=1}^{\infty} p_n\left(2^n-c\right)$ となり、これは以下のように展開されます：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^n - c = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n 2^n - c = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - c \to \infty$$

つまり、どのような参加料であっても、その額にかかわらず、利益の期待値は、無限大に発散します．期待値原理に従えば、参加料がいくら高くても参加する方が有利だということになります．しかし、このゲームに 1 万円出して参加する人はいないでしょう．パラドックスと称される所以です．

以下では、フェラー（[10]の pp.324-327）の考え方を参考にして妥当な参加料を検討してみましょう．

まず、多くの人がこのゲームに何度も参加すると仮定してみます．そのとき得られる利得（合計取得金額）は、当然ながら参加する回数に依存しますが、参加回数と利得の関係に注目します．通常は、利得は参加回数に正比例すると考えられますが、このケースではどうでしょうか．期待利得は発散してしまうので、現実的な設定として、参加回数のうち平均して 1 回以上得られる利得だけを考えてみます．1 回参加して $S=2^m$ の利得が得られる確率は $1/2^m$ なので、$n=2^m$ 回参加すれば、平均して 1 回この利得が得られます．そこで、参加回数 $n=2^m$ 回のうち、$1/2^k$ の割合（回数は 2^{m-k}）で利得 2^k を得るものと想定してみます[11]（ただし $k=1,\cdots,m$）．こうすると、利得の合計は $\sum_{k=1}^{m} 2^{m-k}2^k = \sum_{k=1}^{m} 2^m = m2^m$ となりますが、$m=\log_2 n$ より、これは $n\log_2 n$ と書くことができます．つまり、参加回数 1 回あたりの利得は $\log_2 n$ と定数ではなく、利得は参加回数に正比例するのではないといえます．

状況を視覚化してみましょう．参加者数を 100 人、参加回数を 1～2^{20}（約 105 万回）としてシミュレートし

9 筆算が面倒ならば、エクセルのワークシートのセルに、「=2^10」や「=2^20」を入力すれば確認できます．エクセルではキャレット「^」で冪（べき）を示します．

10 より正確には、「1 回目に初めて表が出る」、「2 回目に初めて表が出る」、「3 回目に初めて表が出る」、…という事象について、そのうちの任意の 2 つの事象は同時には生じない（互いに背反）、しかし、いずれかの事象は必ず生じる（和事象が全事象）という意味です．

11 $n=2^m$ 回のうち、$S=2^m$ より多くの利得が得られる可能性は無視する、あるいは、同じことですが、2^m 以上裏が続く場合は利得を 0 とするとみなしていることになります．

た結果を図 3に示します. 各折れ線は1人の参加者に対応し、参加回数と利得との関係を示しています（横軸、縦軸ともに底2の対数目盛であることに注意[12]). 右上がりの帯状に見える領域は、こうした100人分の折れ線が重なり合ってできたものです. コインの表がなかなか出なくて、非常に大きな金額を得る幸運な人が所々で出現しますが、さらに参加し続けると、帯状の領域に引き戻されていく様子が伺えます. 図の白い丸印は、参加者数100 人の各参加数における標本平均を示しています. n 回参加したときの利得（確率変数）を $S(n)$ とすると、フェラーが示したのは、ちょうど n 回参加する人の参加料 $c(n)$ を $c(n) = n\log_2 n$ と決めれば、$n \to \infty$ のとき、「利得 $S(n)$ は $c(n)$ に（確率的な意味で）収束する」[13]というものです. これは、先ほどの結果と一致しています.

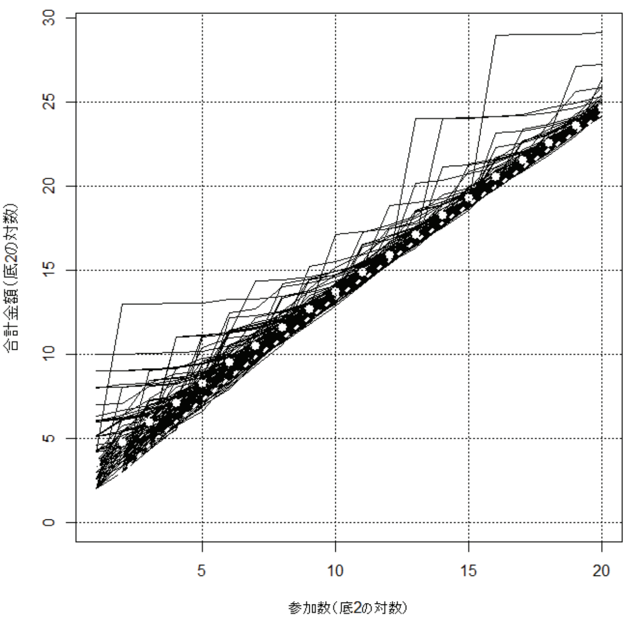

図 3　参加回数と利得

[12] 例えば、両対数グラフでの直線 $\log_2 y = a\log_2 x + b$ は、$y = 2^b x^a = Bx^a$（ただし $B = 2^b$）と同じことです.

[13] 「任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$P[|S(n)/c(n) - 1| > \varepsilon] \to 0$」というのが、より正確な意味です（確率収束と呼ばれます). フェラーは、大数の法則とチェビシェフの不等式を使ってこの収束性を証明しています. なお、上記の条件が満たされる賭けは、（古典的な意味で）公正であると言われます.

4. 賭けの金額

以下の問題を考えてみましょう.

> 【ゲーム 5】偏りのないコインを投げ、表が出れば掛け金の2倍の金額がもらえ、賭け金も返還されます. 裏が出れば、賭け金没収です. 1円単位で賭けられます. あなたには自由になる所持金が1万円あり、全額失っても仕方ないが、できるだけ大きく儲けたいとします. (1)1回だけこのゲームに参加できるとするといくら賭けますか？また、(2)多数回（例えば 100 回）ゲームに参加できるとするとどのように賭けるのがよいでしょうか？

まず、この賭けはあなたにとって有利なものかどうかを調べてみましょう. 賭け金を s 円として1回参加するときを想定してみます（この場合 $0 \le s \le 10000$ です). 勝てば(コインの表が出れば)、利益は賭け金の2倍($2s$)です. 負ければ（コインの裏が出れば)、賭け金の没収だけに終わるので、賭け金分 s が損失（利益は $-s$）となります. つまり、1 回参加するときの利益の期待値は $2s \times \frac{1}{2} - s \times \frac{1}{2} = \frac{s}{2}$ となります. 賭け金額 s が大きいほど利益の期待値が大きくなるので、(1)1 回だけこのゲームに参加できる場合には、所持金（以下「資産」とも呼びます）の1万円全額を賭けるのが合理的でしょう.

では、(2)のケースはどうでしょうか. どの回でも、賭け金 s で参加するときの利益の期待値は $\frac{s}{2} \ge 0$ で、賭け金を増やせば増やすほど利益の期待値は高まります. 従って、利益の期待値を最大にすることを考えれば、所持金全額を毎回賭けるのが最適だということになります. しかし、多数回（例えば100回）ゲームに参加できるときに、毎回このような賭け方を続ける人はいないでしょう.

ゲーム4と同じく、シミュレーションで視覚化してみましょう. 初期の所持金 $a_1 = 1$（万円）から始めて、賭けの各時点 t で、資産額 a_t のうちの一定割合 x（$0 \le x \le 1$）を賭けるものとします（x を賭け金比率と呼びます). 図 4は、9通りの賭け金比率 $x = 0.1, \cdots, 0.9$ について、参加回数 1000 回までに初期の資産1万円が

どのように変化するかを参加者 30 人分について求めたものです．縦軸（資産額）は、底 10 の対数目盛です[14]．賭け金比率が 0.1～0.4 の場合は、参加を続けるたびに資産は概ね増加していき、賭け金比率が 0.6～0.7 だと、参加回数が増えると資産は概ね減少していくことが分かります．賭け金比率が 0.5 の場合には「運」次第で、資産が増える人と減る人の割合が伯仲しています．また、賭け金比率が極端な 0.1 や 0.9 と、中間的な 0.4～0.6 を比較すると、極端な場合にはばらつきが小さく、中間的な場合にはばらつきが大きいことが分かります（ただし、縦軸が対数目盛なので、例えば分散の大小関係がグラフから直接読み取れるわけではありません）．

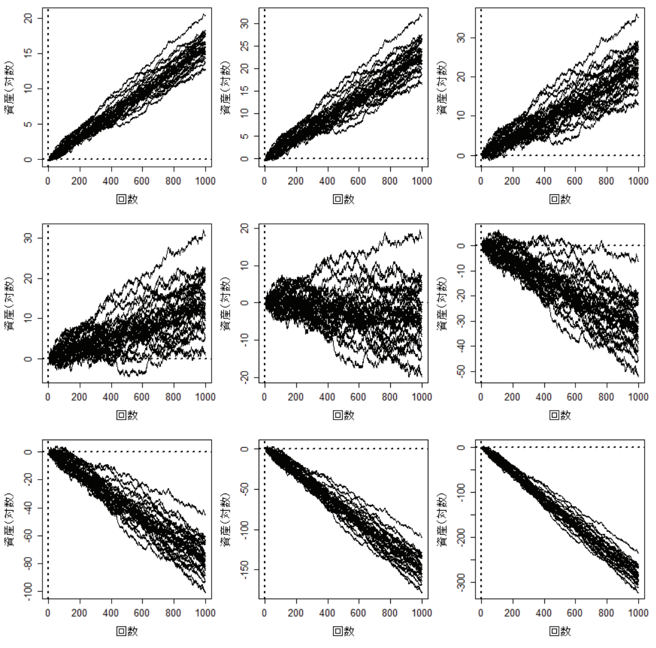

図 4 賭け金比率と資産

この図からは、資産が増加傾向を示し、1000 回までの最終資産が平均的に 20（実際には10^{20}）あたりと高くなっている掛け金比率 0.2 が望ましいと考えられます．掛け金比率 0.3 でも同じ程度の最終資産になっていますが、ばらつきの小さい 0.2 の方が望ましいでしょう[15]．では、これが最善で、これより高い最終資産が得られるような掛け金比率は他にないのでしょうか．

以下では、最適な掛け金比率を計算によって求めてみましょう[16]．資産額aのうちのx（$0 \le x \le 1$）を賭ける（つまり賭け金ax）とすると、勝てば利益は$2ax$で、資産は$a+2ax=a(1+2x)$となり、負ければ損失がaxで、資産は$a-ax=a(1-x)$となります．つまり、どの時点の賭けでも、勝てば資産は$1+2x$倍、負ければ$1-x$倍になることが分かります．n回賭けに参加しm回勝った（同じことですが、$n-m$回負けた）とすると、最終資産は当初の$(1+2x)^m(1-x)^{n-m}$倍になります．賭け 1 回あたりの平均倍率（相乗平均）は$(1+2x)^{\frac{m}{n}}(1-x)^{\frac{n-m}{n}}$です[17]．この平均倍率を最大にする掛け金比率を求めればよさそうです．

平均倍率の式で、m/nはn回のコイントスで表が出る比率、$(n-m)/n$は裏が出る比率なので、非常に多数回参加すれば、大数の法則から、いずれもm/nに近づくと考えられます．従って、$f(x)=(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$（計算上は、より簡単なこの 2 乗$(1+2x)(1-x)$）を最大化すれば良いことになります．これは上に凸な 2 次関数なので、簡単な計算から、最適な掛け金比率は$x=1/4=0.25$であることが分かります（$f(x)$のグラフは図 5 を参照）．また、対応する賭け 1 回あたりの平均倍率（相乗平均）

---

[14] このような片対数グラフでの直線$\log_{10} y = ax+b$は、$y=10^b 10^{ax}=B\,A^x$（ただし$B=10^b, A=10^a$）と同じことです．

[15] 投資理論においては、収益率のばらつき（標準偏差）をリスクととらえるのが一般的です．従って、収益率の平均値が等しい 2 つの投資案については、ばらつきの小さい案がより好ましいと考えます（例えば[11]の 6 章参照）．このゲームの賭け金比率$x=0.2, 0.3$の比較では、両者の平均倍率は同じですが、賭け金比率 0.2 の方が 0.3 よりも平均倍率のばらつきが小さいので、より好ましいということになります．

[16] 以下の説明は[1]を参考にしました．こうした計算は, Kelly の公式（あるいは Kelly 基準）と呼ばれるものの特別な場合に相当します（[8][11]）．投資の分野では、オプティマル f と呼ばれることもあります（[9]）．

[17] 分数べき$1/n$がn乗根に相当することを思い出してください．

は$(1+1/2)^{\frac{1}{2}}(1-1/4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9/8}\approx 1.06066$になります．

ちなみに、図 4 で見た$x=0.2, 0.3$の場合だと、計算上も同じ約 1.0583 という平均倍率になり、$x=0.25$の場合より若干低めになります．また、$x=0.5$を境にして、$0\le x\le 0.5$では$f(x)$が 1 以上、$0.5\le x\le 1$では 1 以下となることが分かります．

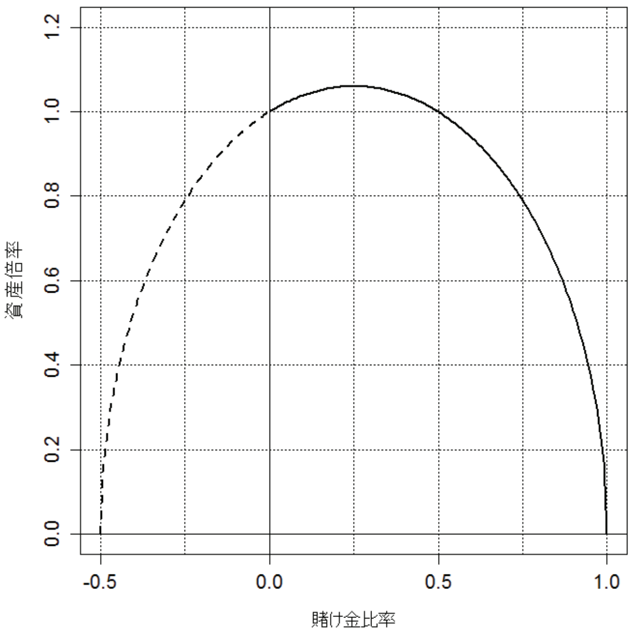

図 5 賭け金比率と資産倍率

$x=0.25$での資産変化を参加者 100 人分についてシミュレートした例を図 6 に示します．前述のように、賭け 1 回あたりの平均倍率（相乗平均）は約 1.06 になるので、賭け回数nだと当初資産 1（万円）は1.06^n（万円）になりそうです．$\log_{10}1.06^n = n\log_{10}1.06 \approx 0.025n$と対数を取ったものが、図の右上がりの破線です．確かに、概ねこの線に沿って資産が変化することが分かります（$n=1000$とすると、約 25 なので最終資産額は10^{25}万円）．

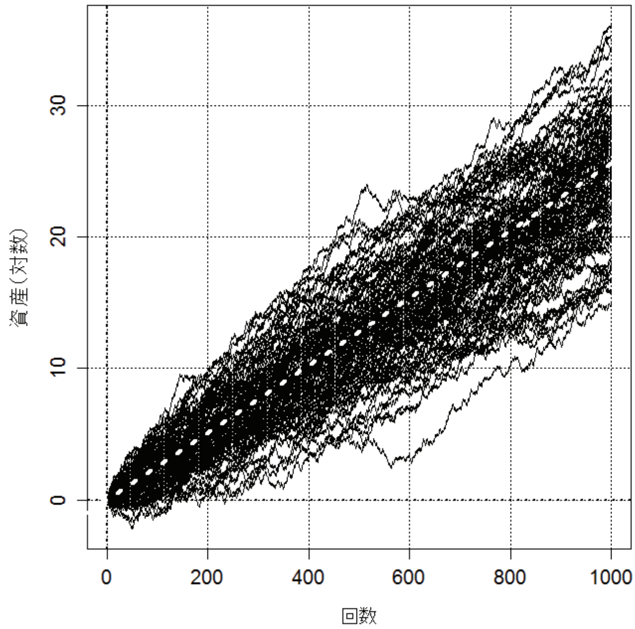

図 6 最適賭け金比率での資産

ルーレットなどのギャンブルでは昔から様々な賭け方が工夫されてきました．中でも倍賭け法（martingale system）と呼ばれる方法が有名です．ここまでの議論では、掛け金比率を一定とし、その最適な値を求める問題としてゲーム 5 を取り扱いましたが、倍賭け法では、掛け金比率は大きく変動します．倍賭け法には色々なバリエーションがあるようですが、単位金額（1 単位のお金）を決めて、まず 1 単位賭け、負ければその倍の 2 単位、さらに負ければそのさらに倍の 4 単位、…という賭け方が基本的です．そして、勝った場合には、掛け金を元の 1 単位に戻して続けます．

例えば、トスしたコインの表裏を当てる賭けで、勝てば賭け金分が利益、負ければ賭け金分が損失という場合にこの方法を使えば、どういうことになるでしょうか．仮に、最初の 3 回負け続け、4 回目に初めて勝ったとすると、各回の利益は$-1,-2,-4,8$（単位）となり、トータルで 1 単位の利益が得られます．この方法に従えば、勝ち続けている間は 1 単位ずつの利益が得られますし、いくら負けが続いても、勝った時点で必ず 1 単位の利益が得られるということになりますが、本当にそんなにうまくいくでしょうか．また、ゲーム 5 にこの方法を適用するとどのようになるでしょうか、応用問題として考えてみてください（シミュレーションの結果を「付録 2」に示します）．

5. おわりに

確率に関するいくつかの話題を賭けのゲームに絡めてパズル形式で書いてみました．本格的な確率の話は難しいものが多いのですが、賭けのゲームに限らず、スポーツでの戦略や私たちの日常生活の中でも確率的な見方で眺めると分かりやすくなることがあると思います．学生のみなさんには、堅苦しくない脳トレの１つとして、こうした問題にも関心を持ってもらえればと思います．

記念号ということで、最後に一言．

先生方には大変お世話になり、感謝しております．

コース制のカリキュラムだったネットワーク情報学部の創設当初から、齋藤先生とは、同じ情報戦略（ストラテジー）コースを担当しました．ビジネスモデルの課題をコースの演習で取り上げるようになったのは、先生の発案によるもので、現在の IT ビジネスプログラムでも継承されています．近年では、2 つの端末室に分かれてデータ分析基礎演習を一緒に担当させていただきました．学生が演習課題に取り組んでいるときなどに、隣の端末室から先生がいらっしゃって、授業の打ち合わせ以外にも、データ解析の話からレポートコピー対策ソフトの話まで、色々と面白いお話を伺うことができました（先生ご自作の音声確認付き成績入力用ソフトまで頂戴しました）．SA の学生さんには、「仲がいいですね」などと冷やかされました．

佐藤先生には、本論集でもお世話になりました（論集が最初に発刊された時期に、私は編集委員でした）．「学生さんにも読んでもらえる論集」というコンセプトに合った論文をたくさん寄稿して下さいました（『「分かる」とはどういうことか(1)～(6)』というシリーズはおすすめです）．また、私の記事の誤りの訂正と、ていねいなコメントを頂戴しました（[5]）．ずっと昔、経営学部でご一緒していた時分に、佐藤先生の学内研究発表を拝聴したことがあります．先生が書きためられている「伝説の」研究ノートの一部をその際に拝見できました．図と数式がびっしり詰まったページは、見る者をして恐怖に慄かせます．「数学（能力）を一から叩き直さないと先生のようにはなれないよ」という高津信三先生の言葉に同感しました．学問に対する姿勢の一端だけでも見習いたいものだと思います．

齋藤先生、佐藤先生は私にとって大先輩ですが、青木先生は私と年齢が近く、同級生という感じを持っていました．あるとき、会議に来られないので部屋まで訪ねると、サマーベッドでコンビニ弁当を食べながら勉強されているようでした（「時間なんですけど」）．物静かでいつも思索している、いかにも数学者といった印象なので、つい揶揄したくなって、「ご家庭で家事などされることはないでしょうね」などと不躾に問うと、「風呂掃除してますよ」と爽やかにあしらわれました．「Pov-Ray による 3DCG-専修大学 9 号館案内板-」というテーマで先生の担当されたプロジェクト（2006）が印象に残っています．サブタイトル通り、9 号館内部の様子を非常に詳細に表現した 3DCG が成果物で、部屋内部の椅子までも忠実に表現されています．単純作業を学生がやっただけだというように謙遜されていましたが、デザイン系の教育が今ほど充実していなかった当時、よく指導されたものだと感心しました．力学系がご専門だったと思いますが、レイトレーシングの話もされていました．青木先生には、衷心よりご冥福をお祈り申し上げます．

付録 1

【エコカーの燃費】

先ず、A 社、B 社のエコカー1 台ずつで考えてみましょう．燃費は「走行距離÷使ったガソリン量」で計算されます．A 社、B 社のエコカーを 1 台ずつ 1ℓ のガソリンで走らせると、「総走行距離÷使った総ガソリン量」は $(20+30)/2=25$（相加平均）ですが、これを燃費の平均と考えるのは問題があります．人はガソリン量を基準に車を走らせるのではなく、（移動したい）距離を基準に車を走らせるからです．例えば、A 社の車に乗っている人が B 社の車に乗り換えた場合、1 ヶ月当たり、以前と同じだけのガソリンを要するように車を使うのではなく、以前と同じ距離を走るために車を使うと考えるべきでしょう．

A 社の車は、1km あたり 1/20 ℓ のガソリンを要し、B 社の車は、1km あたり 1/30 ℓ のガソリンを要するので、合計すると、2km あたり $1/20+1/30$ ℓ のガソリンを使うことになります．つまり、平均燃費は

$$\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}=\frac{1}{\frac{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}{2}} \quad \text{（調和平均）}$$

と計算するのが正しいと思われます（値は 24）．

さて、A 社の 10 万台のエコカーと B 社の 20 万台のエコカーの場合についてはどうでしょうか．いずれの車も単位期間あたり x km 走らせるとすると、合計で $10x+20x$（万 km）走ることになります．A 社の車は

$\frac{10x}{20}$ 万ℓのガソリン、B 社の車は $\frac{20x}{30}$ 万ℓのガソリンを要するので、平均燃費は

$$\frac{10x+20x}{\frac{10x}{20}+\frac{20x}{30}}=\frac{1}{\frac{\frac{10x}{20}+\frac{20x}{30}}{10x+20x}}$$

$$=\frac{1}{\frac{10x\frac{1}{20}+20x\frac{1}{30}}{10x+20x}}=\frac{1}{\frac{10\frac{1}{20}+20\frac{1}{30}}{10+20}}$$

$$=\frac{1}{\frac{10}{10+20}\times\frac{1}{20}+\frac{20}{10+20}\times\frac{1}{30}}$$

となります（値は、$180/7\approx 25.7$）．つまり、燃費の逆数の加重平均（重みは、生産台数の比率 $10/(10+20)$、$20/(10+20)$）の逆数をとったものになるわけで、加重調和平均とでも呼ぶべき量になります．現実にも、自動車メーカーが製造する車について企業別の平均燃費を計算するのに CAFÉ 値（Corporate Average Fuel Economy）と呼ばれる荷重調和平均が使われています（例えば[7]参照）．

付録 2

【倍賭け法】

倍賭け法を使ってゲーム 5 に参加した場合の資産変化の例を示します．シミュレーションの設定条件は以下の通りです：ゲームの参加人数は 500 人とし、参加者 1 人当たり 1000 回ゲームを行うものとします．また、単位金額は 500 円、1000 円、2000 円、5000 円とした 4 通りの場合を想定します．

なお、例えば、単位金額を 5000 円とした場合、最初に負けると、この方法では、2 回目の賭け金を単位金額の 2 倍（＝1 万円）にする必要があります．残りの所持金（資産）は 5000 円しかないので、2 回目は賭けられないということになりますが、以下のシミュレーションでは、資産が正である限り（借金して？）賭けられるものとし、資産額が負になった時点で「破産」したとみなします．そして、一度破産すると、それ以降は参加できないとします．

以上の想定のもとで行った結果を図 7 に示します．左上の図が単位金額 500 円、右上が 1000 円、左下が 2000 円、右下が 5000 円の場合です）．縦軸は資産（万円）を示します．

4 通りの単位金額のいずれも同じようなグラフの形状を示していますが、資産額は単位金額により異なります．右上がりの帯状の領域に注目すると、1000 回の参加で最終資産は 100 万円～1 千万円のオーダーになりそうです．参加者側に非常に有利な賭けなので、額自体は大きいものの、最適な賭け金比率（図 6）による 10^{25} 万円とは比較にならない少なさです．さらに問題なのは、破産の頻度が非常に高いということです[18]．右上がりの帯状の領域が目につくので、グラフからは勝率が高いように見えますが、いずれの単位金額でも、500 人の参加者のうち半数以上が破産しています：破産の割合は、55%（単位金額 500 円）、63%（単位金額 1000 円）、73.2%（単位金額 2000 円）、79.4%（単位金額 5000 円）．勝者についても資産の変動が大きいようで、破産額も大きくなるかなりリスキーな賭け方のように思われます．

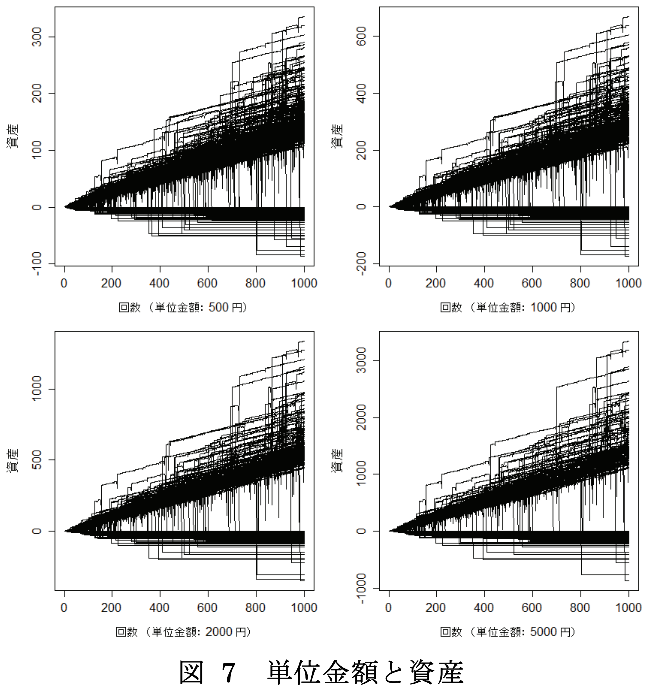

図 7　単位金額と資産

[18] 一定の賭け金比率の場合には、金額を実数とみなしているので、見掛け上、資産は常に正の値を取りますが、実際には、資産が 1 円未満になった時点で破産しています．それでも、この例と違って借金は避けられます．

参考文献

[1] ￥∞、「ケリー基準」、http://www.geocities.jp/y_infty/management/index.html
[2] Wikipedia, "Simpson's paradox", http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson's_paradox
[3] Wikipedia,「サンクトペテルブルクのパラドックス」、http://ja.wikipedia.org/wiki/サンクトペテルブルクのパラドックス.
[4] Wikipedia、「モンティ・ホール問題」、http://ja.wikipedia.org/wiki/モンティ・ホール問題.
[5] 石鎚英也、「補遺：0^0とその周辺」、ネットワーク＆インフォメーション、No.4（2003）、pp.17-22.
[6] 上村文雄、"サンクトペテルブルクのパラドックス"、http://www.rd.mmtr.or.jp/~bunryu/sentpeterubourg.shtml
[7] 環境省中央環境審議会、「自動車 WG とりまとめ」、2013 年以降の対策・施策に関する検討小委員会（自動車 WG、平成 24 年 2 月 27 日報告）. http://www.env.go.jp/council/06earth/y0613-10/mat01.pdf
[8] パウンドストーン、「天才数学者はこう賭ける」、青土社.
[9] ビンス、「投資家のためのマネーマネジメント」、パンローリング.
[10] フェラー、「確率論とその応用 I 下」、1961、紀伊國屋.
[11] ルーエンバーガー、「金融工学入門」、日経.