みなさん，論集を読んでますか

—「正方形の正方形分割問題」余話—

Do You Read our Review?

— after Reading the Article concerning the Squared Square Problem —

ネットワーク情報学部　佐藤　創
School of Network and Information　Hajime SATO

Keywords：squared square, electric circuit, planar graph, algorithm

まえがき

本稿は，2004年3月発行の論集「専修 ネットワーク情報 & インフォメーション No.5」に掲載された森 克美教授の解説論文「最良のアンテナ設置案は？」についての読後報告にあたる．

この論集は，娯楽雑誌とは違って読むのに多少の忍耐が必要であるが，大脳への滋養をたっぷり盛り込んで年2回発行されている（バックナンバーは図書館本館にある）．これは「ネットワーク情報学会」の機関誌なのだが，その会員である学生諸君に親しく読まれているだろうか．

各学部ごとの論集は発行後，校舎入り口付近や廊下に積まれ，ほとんど関心を呼ぶことなく廃棄処分を待つかのようで，それは実に痛ましく，スポンサーである学生諸君にも申し訳けない．本学部では心機一転，論集の体裁をA4版2段組に変更し，内容や文体は学生読者を強く意識する方針をとった．教員と学生との共著も歓迎されている．

読者への思いを存分にこめて作成される論集だが，読者の反応がほとんど伝わってこない．その思いに応えるために，筆者と読者の座談会（「学会」に準じて）を企画してみてはどうか，時には掲載論文に言及した投稿があってもいいのではないか，などと思う．これが本稿の執筆動機の一つである．

1　難しいことを楽しく

論文[1]の中心テーマはその副題の通り，「正方形の正方形分割」という数学の問題である．この論文を読んだおかげで，これまで敬遠してきた旧知の難問と楽しく再会することができた．

本稿の目的は，この問題の解と電気回路の間の自然な対応関係を記すことにある．まず最初に，[1]の10ページ図3にある解と，それに対応する電気回路とを示す．

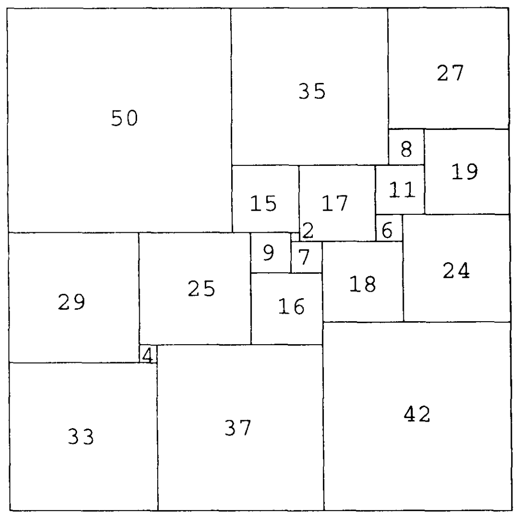


図 1.1　正方形の正方形分割の解（位数 21）

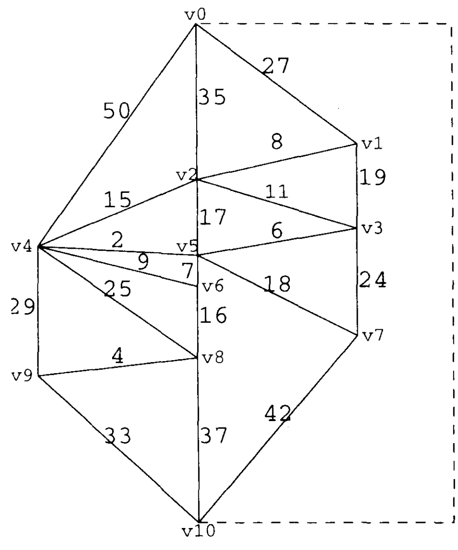


図 1.2　上の解に対応する電気回路

（点線で追加した辺 $v_{10}-v_0$ を“**もどりの弧**”とよぶ）

この回路の節点 ($v_0, v_1, \cdots, v_{10}$) を結ぶ 21 本の線分に，すべて 1 オームの抵抗があるとすれば，v_0 - v_{10} 間の合成抵抗は理論上，やはり 1 オームのはずである．

試みに回路を組んで測定してみようと思いつき，秋葉原電気街で抵抗と基盤を手に入れて結線してみた．翌日，“決定的瞬間”を期待したが，本学自然科学研究所で測定してみるとほとんど“無抵抗”(短絡) 状態だったので驚いた．抵抗の測定単位が 1 キロオームだったのである．そこで電気通信大学を訪ねて感度のよいテスターで測ることにした．

まず，1 個の抵抗を単独で測定すると，測定値の表示が 1.3 オーム前後を動く．すでにこれで結果は期待薄である．抵抗の精度 ±5 %という表示が疑わしい．案の定，目的の合成抵抗を測ってみると 2 オーム前後であった．多少の誤差は覚悟していたが，ちょっとガッカリである

こうして，試作回路とテスターの表示を写真にして掲載するアイディアは陽の目を見なかった．しかし，ディジタル万能と思える環境の中にあって，このようなアナログ思考を対比できたことで，精神的な健康を少し取り戻したような気がした．久しぶりに楽しいひと時を味わう機会をもたらした論文 [1] に感謝したい．

2 正方形分割問題と電気回路

2.1 正方形分割

我々の問題の定義を再録する．

長方形 (矩形) の内部に $n (> 1)$ 個の正方形を過不足なく敷き詰めたものを，長方形の位数 n の正方形分割 (あるいは，正方形による長方形の分割) という．

その n 個の正方形の大きさがすべて異なるとき，正方形分割は**完全**であるという．また，その内部に長方形の正方形分割を含まないとき，正方形分割は**単純**であるという．とくに，分割される長方形が正方形である場合を，**正方形の正方形分割**という．

テーマとなった問題は，「正方形の完全，かつ単純な正方形分割を求めよ」というものであった．試みに紙と鉛筆で少し解を探ってみると，問題の困難さが実感できる．

[1] によると，1978 年に A. J. W. Duijvestijn という人 (ドゥアイベスタイン？ どこの国？) がコンピュータを駆使して上記の最小位数 21 の解を発見した．

2.2 電気回路とグラフ

2.2.1 オームの法則と長方形

オームの法則は，電流 I，電圧 V，抵抗 R の間に関係

$$V = R \times I$$

が成り立つことを述べている．すなわち，電流と電圧は比例関係にあり，その比例定数が抵抗である．

R オームの抵抗に I アンペアの電流が流れ，両端の電位差が V ボルトになる回路の状態は，横の長さ I，たての長さ V の長方形で表される (図 2.1)．したがって，とくに $R = 1$ のときは正方形になる．

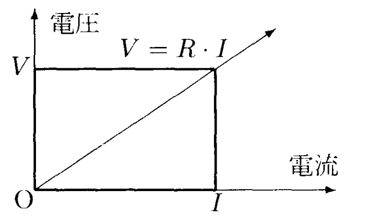


図 2.1 オームの法則と長方形

例えば，1 オームの抵抗を 2 個直列につないだ回路の各抵抗に 10A の電流が流れる状態は，1 辺の長さが 10 の正方形を 2 個たてに並べた図形になる．同様に，2 個並列につないだ回路の各抵抗に 10A の電流が流れる状態は，同じ正方形を 2 個横に並べた図形になる (図 2.2)．

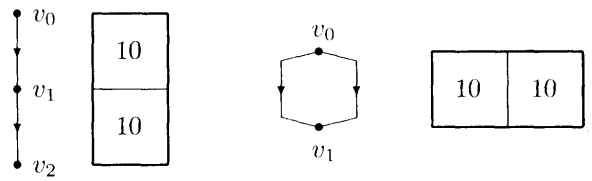


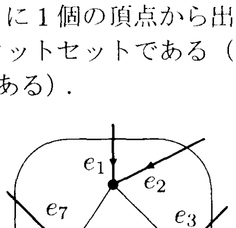
図 2.2 抵抗の直列と並列

2.2.2 キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則には電流則と電圧則がある ([2])．

キルヒホッフ電流則は，回路を流れる電流は分岐しても消滅しないことを意味する．すなわち，頂点の集合を 2 つの連結成分に切り離す辺の極小集合 (カットセット) に関する電流の和 (方向を考慮) は常に 0 である，と表現される．**もどりの弧**には回路を流れる総電流に等しい電流が流れるものとする．

とくに 1 個の頂点から出る辺とその頂点に入る辺の集合もカットセットである (独立なカットセットは頂点数 −1 個ある)．



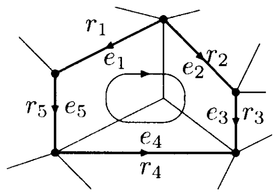
$$e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \\ -e_5 - e_6 + e_7 = 0$$

(e_k：辺 k を流れる電流)

図 2.3 キルヒホッフ電流則

キルヒホッフ電圧則は，任意の 2 頂点間の電位差は 2 点を結ぶ経路によらず一定であることを意味する．すなわち，閉路を形成する辺の電位差の和 (方向を考慮) は常に 0 である，と表現される．**もどりの弧**の電位差は，この回路に電流が流れるように適当な値に設定する．

とくに平面グラフの 1 個の面の境界をなす辺の集合は閉路をなす（独立な閉路は面の個数 −1 個ある）．



$$-r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 \\ -r_4e_4 - r_5e_5 = 0$$

（辺 k の電流を e_k，抵抗を r_k とする）

図 2.4　キルヒホッフ電圧則

オイラーの公式 [1] により，キルヒホッフの電流則と電圧則から得られる独立な等式がちょうど辺の個数（もどりの弧を含めて）だけあるので，もどりの弧に設定した電圧に応じて各辺を流れる電流が定まる．

図 1.2 の電気回路には各辺を流れる電流が記されているが，その値を求めるための方程式は以下の通りである．ここに変数は，数値 k の記された辺の電流を e_k，抵抗を r_k などと記し，もどりの弧の電流と電圧を I, V とする．

キルヒホッフ電流則より，

$$\begin{cases} I - e_{50} - e_{35} - e_{27} = 0, \\ e_{27} - e_8 - e_{19} = 0, \\ e_{35} + e_8 - e_{15} - e_{17} - e_{11} = 0, \\ e_{19} + e_{11} - e_6 - e_{24} = 0, \\ e_{50} + e_{15} - e_2 - e_9 - e_{25} - e_{29} = 0, \\ e_2 + e_{17} + e_6 - e_7 - e_{18} = 0, \\ e_9 + e_7 - e_{16} = 0, \\ e_{18} + e_{24} - e_{42} = 0, \\ e_{25} + e_{16} - e_4 - e_{37} = 0, \\ e_{29} + e_4 - e_{33} = 0, \end{cases}$$

同様に，キルヒホッフ電圧則より，

$$\begin{cases} r_{27}\,e_{27} + r_{19}\,e_{19} + r_{24}\,e_{24} + r_{42}\,e_{42} - V = 0, \\ r_{35}\,e_{35} - r_8\,e_8 - r_{27}\,e_{27} = 0, \\ r_{50}\,e_{50} - r_{15}\,e_{15} - r_{35}\,e_{35} = 0, \\ r_8\,e_8 + r_{11}\,e_{11} - r_{19}\,e_{19} = 0, \\ r_{15}\,e_{15} + r_2\,e_2 - r_{17}\,e_{17} = 0, \\ r_{17}\,e_{17} - r_6\,e_6 - r_{11}\,e_{11} = 0, \\ r_6\,e_6 + r_{18}\,e_{18} - r_{24}\,e_{24} = 0, \\ r_9\,e_9 - r_7\,e_7 - r_2\,e_2 = 0, \\ r_{25}\,e_{25} - r_{16}\,e_{16} - r_9\,e_9 = 0, \\ r_{29}\,e_{29} - r_4\,e_4 - r_{25}\,e_{25} = 0, \\ r_{33}\,e_{33} - r_{37}\,e_{37} + r_4\,e_4 = 0, \\ r_7\,e_7 + r_{16}\,e_{16} + r_{37}\,e_{37} - r_{42}\,e_{42} - r_{18}\,e_{18} = 0 \end{cases}$$

が得られる．すべての辺の抵抗 を $r_k = 1$ としてこれを解くと $e_k = kV/112, I = V$ となる．したがって，合成抵抗は $R = V/I = 1$ であり，整数化のために $V = 112$ とすれば，$e_k = k, I = 112$ となる．

辺の向きは任意に定めてよく，解の値が負になれば逆向きに電流が流れることがわかる．

図 1.2 の頂点 v_k は，2 点間の垂直方向の高さの差が電位差に比例するように描かれている．これは論文 [1] の図 15 における水平線分の高さに対応するものである（[1] の方程式 (11) の変数 y_j が電位差にあたる）．

2.3　グラフの平面性

電気回路として平面性は特別な条件ではなく，キルヒホッフの法則により電流，電圧が定まるが，その状態がいつも長方形の長方形分割に対応するわけではなく，回路が**もどりの弧**を含めて平面グラフになることが必要である．以下にその例を示す．

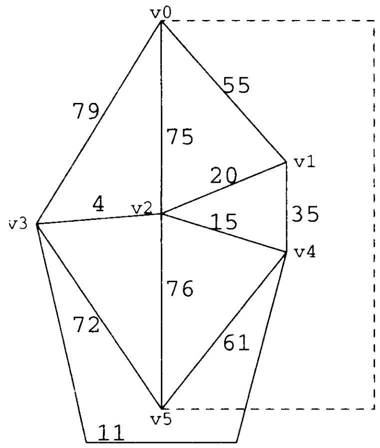


図 2.5　非平面的回路

図 2.5 の回路は，もどりの弧（点線）を付加すると平面グラフにならないため，回路は現実に存在するが長方形の正方形分割と対応しない．

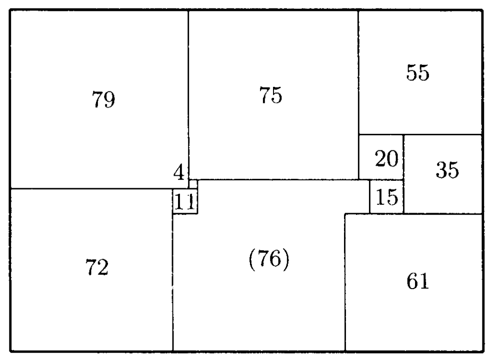


図 2.6　正方形分割にならない例

実際，図 2.5 の回路から正方形分割を試みると，1 辺の長さが 11 の正方形（辺 $v_3\,v_4$ に対応する）をどこにおいても，1 辺 76 の正方形をつくることができない（図 2.6）．

こうして論文 [1] に紹介された定理の重要さが再認識された．

2.4　解発見への道

正方形の正方形分割問題を電気回路の構成問題に言い換えることができても，それで解が特段に発見しやすくなったわけではない．論文 [1] に記されているように，位数 n の解を見つけるにはもどりの弧を含めて辺の数が $n + 1$ 個の 3 連結（各頂点に辺が 3 個以上ある）平面グ

ラフで，対応する電気回路の合成抵抗が 1 になるものを見つけなければならない．

位数 n に限れば探索対象は有限個には違いないが，未発見の解を求めるには n を増やしていくわけだから計算時間との格闘になる．

解の位数に上限があるかどうか予想もつかない．

3 無限回路

規則的な繰り返しのある電気回路の抵抗は，コンピュータがなくても計算できることがある．

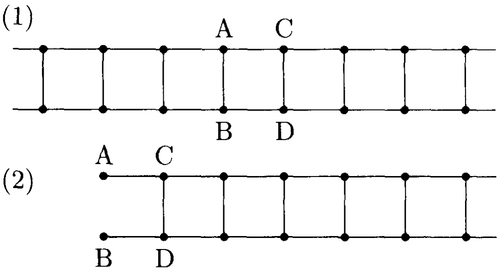


図 3.1 無限はしご回路

図 3.1(1) において下線は接地で BD 間の抵抗はゼロとし，AB,AC,CD 間はすべて 1 オームとする構造が左右に無限に繰り返される「はしご回路」を考える．この回路の 2 点 A, B 間の合成抵抗 r を求める問題は，次のように解くことができる（[3]）．

まず図 3.1(2) のように，点 A, B より左側がないものと考える（線分 AB も除く）と，この構造は C, D より左側のない構造（線分 CD も除く）とまったく同じである．そこで，右無限のはしご回路 (2) の合成抵抗を g オームとすると，直列並列構造から次の関係が成り立つ．

$$g = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{g}} = \frac{2g+1}{g+1}.$$

したがって，g は方程式 $g^2 - g - 1 = 0$ の正の解

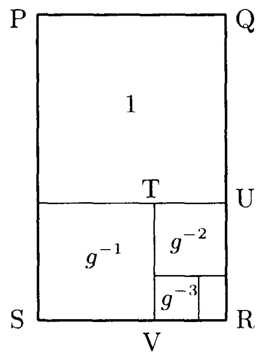
$$g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots,$$

すなわち，黄金分割比に等しい．よって，求める値は

$$r = \cfrac{1}{\frac{1}{g} + \frac{1}{1} + \frac{1}{g}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

である．

はしご回路 (2) に対応する長方形の正方形分割は図 3.2 のようになる．長方形 PQRS の横たての比は g で，中に全く同じ構造（相似比 g^{-2}）の長方形 TURV を含む．

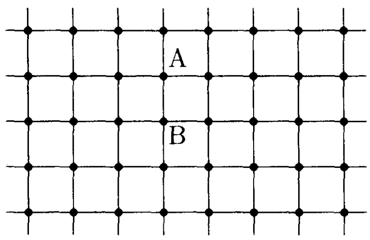


$$g = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

図 3.2 はしご回路 (2) に対応する長方形の正方形分割

図 3.2 における長方形の入れ子構造と，黄金分割比の連分数展開との対比はなかなか興味深い．

最後に，無限はしご回路の 2 次元版“無限格子回路”の合成抵抗を，発展問題として提起しておく．



あとがき

正方形の正方形分割問題は形の美しさから人を魅了してきた．しかし，結局コンピュータによる力づくの探索に帰するようになった．手際よく探索する工夫に人知の独創性が残されているとはいえ，何かさびしい．

論文 [1] には正方形分割問題に関連した数学が次々と紹介されている．ただ単にパズルを追いかけるのではなく，人の思考の広さ，深さをやさしく語りかけているように思われる．

このたび，論文 [1] の筆者である森 克美教授が突然退職の意思を表明され，私たちを驚かせた．森 教授は当初から論集編集委員として，よい論集が発行されることに心を砕いてこられた．本号の企画編集が最後の仕事になったことはまことに残念である．

参 考 文 献

[1] 森 克美，“最良のアンテナ設置案は？ – Lucas の問題並びに正方形による正方形分割 –”，専修ネットワーク&インフォメーション，No.5，2004.

[2] 伊理正夫，白川 功，梶谷洋司，篠田庄司，「演習グラフ理論 – 基礎と演習 –」，コロナ社，1983.

[3] M. R. Schroeder，「Number Theory in Science and Communication」，Springer-Verlag, 1984.