

「分かる」とはということか — (6) 帰納と演繹

What is understanding? — (6) Induction and Deduction

ネットワーク情報学部 佐藤 創

School of Network and Information Hajime SATO

Keywords : understanding, induction, deduction, lattice point, polygon, Pick's theorem

まえがき

前稿では、順位付けの類似度を考察し、2種類の順位相関係数の相違を幾何学的な構造の中で明らかにすることを試みました。

今回は比較的分かりやすい問題を題材として、ある法則性の発見とその理由の探求について記しながら、2つの代表的な思考方法である「帰納」と「演繹」に焦点を当ててみたいと思います。

1 問題を設定する

ある日の深夜、仕事を中断してテレビのチャンネルを回していたら偶然、小学生を対象とした算数の興味深い授業風景を目にしました。まず、記憶をたどりながらその番組の内容を再現してみます（図形の例を追加しました）。

1.1 楽しく算数（TV番組再現）

小学生のクラスで、黒板に張られたボードに生徒が次々と図形を描いています。

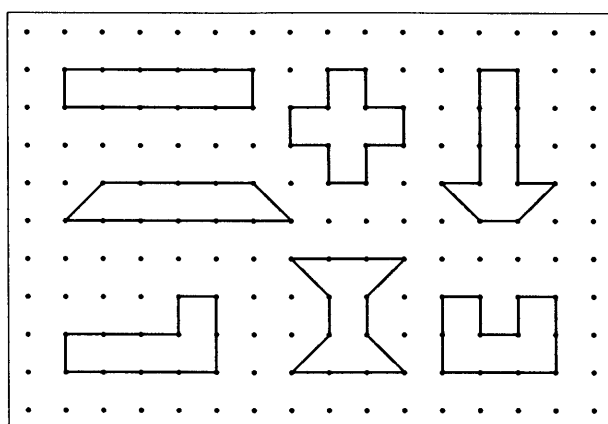


図1 面積5の図形のいろいろ(1)

「ほかに面積が5になる図形を考えた人はいませんか」と先生が促すと、さらに次のような答えが出されました。

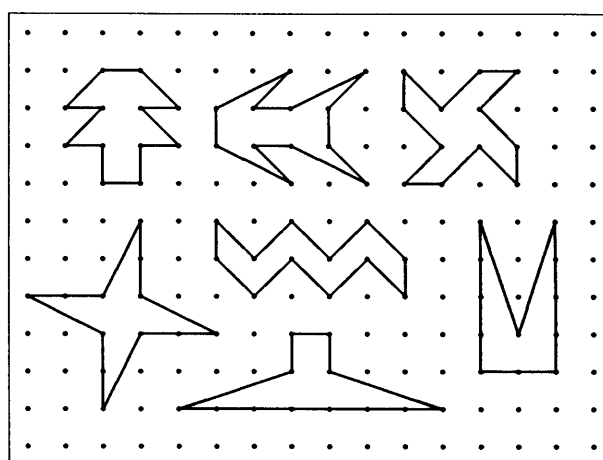


図2 面積5の図形のいろいろ(2)

筆者は番組の途中から見たのですが、生徒が考えている図形が格子点を直線で結んでできる面積5の多角形であることはすぐに分かります。もちろん、基本となる最小の正方形の面積が1です。

ここで先生は、これらの図形の共通点を尋ねました。「どの図形にも共通の特徴があるんだけど、それが何だか分かるかなあ。」

しばらくして一人の生徒が、はい、と手をあげて答えました。「図形を囲む線の上の点の数がどれも12個です。」

「それでは数えてみようか。A君の図形では1, 2, 3, 4, ..., 12。12個だね。Bさんの図形でも1, 2, 3, ..., 12。ほら、12個だ」と、先生は次々と確かめていく。

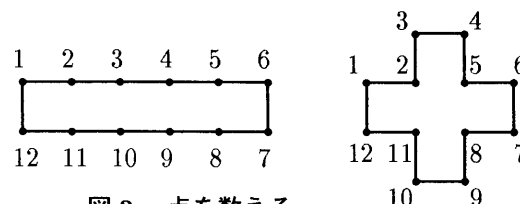


図3 点を数える

「なるほどね。面積5の図形をつくるには12個の点を次々に結んでいけばよい、ということになるね」と先生が言うと、「そうだったのか」と生徒たちのつぶやく声。

「ほんとうにそうだろうか？ 違う、という人はいないかな」と先生が問うと、数人の生徒が「自分の図形に

は点が10個しかない」と言い出して、次の図形を描きに出てきました。

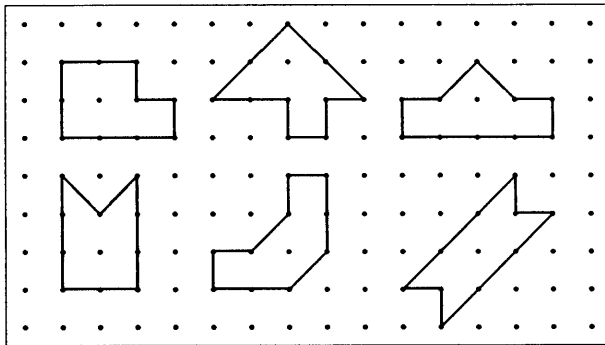


図4 多角形の内部に点が1個ある場合

「この図形で線の上の点を数えると、1, 2, 3, ..., 10。こっちも、1, 2, 3, ..., 10。今度は10個ですね。ほんとうに面積は5だろうか。間違っていないか? C君、確かめて」と先生。

C君は、3角形の部分を移動させながら、どの場合も面積が基本の正方形の5個分に等しいことを上手に説明しました。

「どうもありがとう。とすると、線の上の点の数がさっきより2個少なくなったね。前の図形と変わっているところは何か?」と先生。

すると、Dさんがすぐに手をあげました。「図形の中に点があります。」

「内部に点が1個入った代わりに線の上の点が2個少なくなった。うーん、面白いね。それでは内部に点が2個入る図形があるだろうか? 線の上の点がまた2個減って、今度は8個になるのかな」と先生。

すると、生徒たちから次々と図形が提示されました。

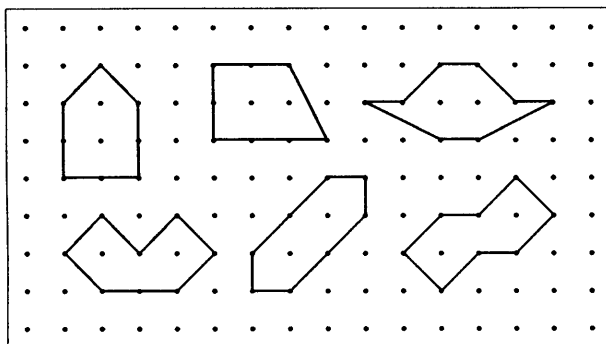


図5 多角形の内部に点が2個ある場合

先生は、これら2個の点を含む図形について、面積が5であること、図形を囲む周上に8個の点があることをていねいに確認し、授業のまとめに入りました。

「面積5の図形には、ずいぶんいろいろな形があるものですね。内部の点の個数と図形を囲む周上の点の個数の関係を整理するとうなりました。」

内部の点の数	周上の点の数
0個	12個
1個	10個
2個	8個
3個	?

「今日はすばらしい法則を発見できました。これで授業を終わります。」

番組のナレーションが、「さあ、テレビの前の皆さん。内部に3個の点がある面積5の図形を考えてみてください。では、さようなら」と締めくくって、15分ほどの番組が終了しました。

1.2 番組を見終わって

とても魅力的な授業でした。何よりも生徒たちの生き生きとして好奇心に満ちた表情が印象的でした。短時間に内容を盛り込む手際のよさにも感心しました。

「何をやろうとしているのだろうか? おお、なるほど、なるほど」と思いながら、「例外があるかも知れない」という疑いと、「理由を示すところまでやるのかな」という期待をもって見続けていたので、突然、終わりになったような気がしました。そして「例外がないなら、この法則の成り立つ理由を考えなくては」という思いが残りました。

さっそく、まず最初に、例外を見つける努力をしばらく続けてみましたが、成功しませんでした。ただし、次のような穴の開いた“ひねくれた”例外の存在を示すことができますが、これらについての考察は本題が一段落した後で行いましょう。

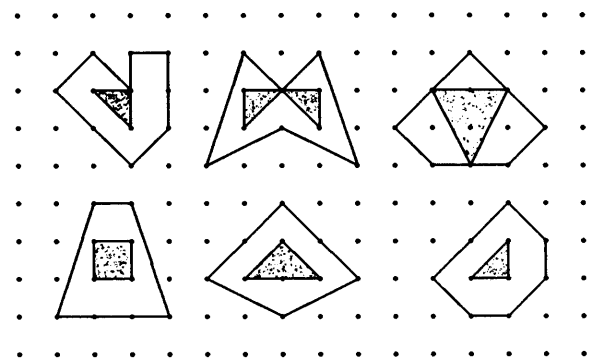


図6 多角形に「穴」のある例外

例外を見つける努力は無駄ではなく、素直に、図形を穴のない多角形に限るならば、番組で示唆された法則はかなり本当らしく思えてきました。

そこで次に、面積5の多角形で内部に点が3個あるものをいくつか作ってみました。

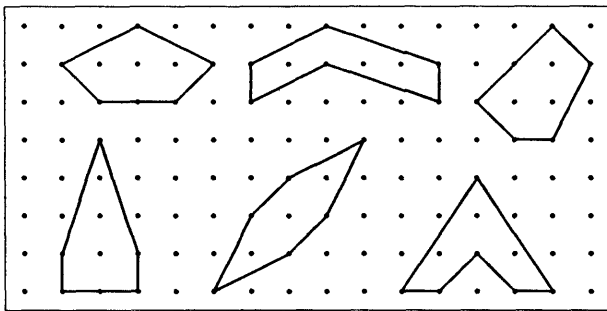


図7 多角形の内部に点が3個ある場合

次に内部に点を4個もつ図形を示します。すべて4辺形です。内部に5点以上ある図形は考えられません。

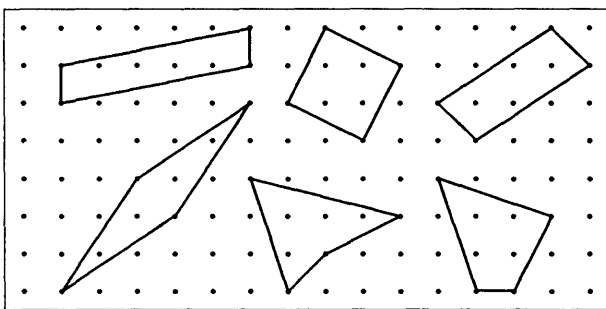


図8 多角形の内部に点が4個ある場合

予想通り、内部の点が1個増えると周上の点の個数が2個減ります。この法則は多角形の面積が5であることに依存しないと考えられます。基本となる面積1の正方形は内部に点がなく、周上に4点あります。こうして、

多角形の面積は、

$$(\text{内部の点の個数}) + (\text{周上の点の個数の半分}) - 1$$

という数量的な予想にたどり着き、残るはこの予想の証明ということになりました。

改めて、この番組で提起された問題を正確に記述してみよう。

問題 平面上に間隔1で並ぶ格子点を、互いに交差しない線分で結ぶ閉じた折れ線によって囲まれる多角形を考える。多角形の面積を S 、内部にある格子点の個数を p (≥ 0)、周上有る格子点の個数を q (≥ 3) とすれば、

$$S = p + \frac{q}{2} - 1 \quad (1)$$

である。この法則の成り立つ理由を明らかにせよ。

念のため説明すれば、**格子点**とは方眼紙の縦線と横線の交点のことです。座標空間上では、各次元の座標が整数となる点として定義されます。

法則(1)を使うと次の問題Aが解けそうな気がします。このような難問も解決する力をもっているとすれば、この法則の発見はさらに素晴らしいことのように思われます。

問題A 3個の格子点を頂点とする3角形の内部に含まれる格子点の個数を求めよ。

2 ウォーミングアップ

本格的な推論に入る前に、この問題の周辺を少し散策してみましょう。道草をせずに本論に進みたい読者は、この節は読み飛ばしていただいて結構です。

2.1 面積の測定法

そもそも法則(1)は想像もできないほど意外でしょうか？決してそうでないことは次のことから分かります。

例えば琵琶湖の面積は、地図と透明な方眼紙があれば簡単に測れます。方眼紙を地図の上に固定し、湖の中に入るメッシュ(正方形)には●を、湖岸と交差するメッシュには○を記入し、個数を数えます。●が p 個、○が q 個とすれば、琵琶湖の面積 S は近似的に

$$S \approx \left(p + \frac{q}{2}\right) A \quad (2)$$

で与えられます。ここに A はこの地図の縮尺によるメッシュ1個の面積です。メッシュが細かいほど近似の精度はよくなるはずですが(作業は大変ですが)。

この式(2)は $A=1$ のとき公式(1)によく似ています。したがって、公式(1)が**大局的に**(小さな誤差を気にしなければ)正しいことが分かります。そしてこの観点からはむしろ、公式(1)が正確に成り立つ、という主張に対して疑いと驚きを抱いてよいところなのです。

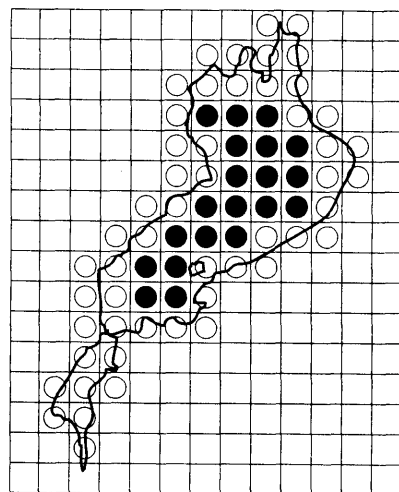


図9 琵琶湖の面積を測る

この発想の延長上には、琵琶湖の形を切り抜いてその重さを精密に測って面積を出す、というアナログ思考があることに触れておきたいと思います。

2.2 近隣点を取り込む場合

勢力圏の考え方とは別に、多角形のごく小さな変形に限って面積の変化に注目してみましょう。

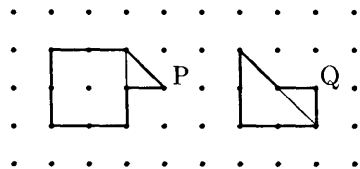


図10 周上の点を1個増やす

図のように、多角形の周に近い格子点をその周に加えて多角形を拡張すると、 q が1つ増加し、その面積は1/2だけ大きくなります。このことから公式(1)における変数 q の係数が1/2であることが納得できます。

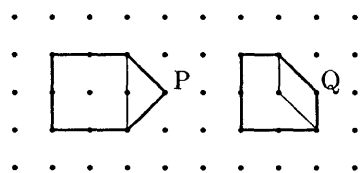


図11 内部の点を1個増やす

同様に、上図のように多角形の周に近い格子点を取り込んで多角形を拡張すると、多角形の内部の点の個数 p が1つ増加し、その面積は1だけ大きくなります。このことから公式(1)における変数 p の係数が1であることが納得できます。

そして、最も小さな多角形は図10において増加分となる直角2等辺3角形であり、 $p=0, q=3, S=1/2$ ですから、公式(1)の定数項 -1 が納得できます。

したがって、このように近隣点を取り込みながら多角形を拡張して生成される多角形について、公式(1)の成立が確認されたこととなります。

ただし、“近隣”の定義は適当に考えてください。また、下図のように遠く離れた格子点を長い線分によって取り込む場合は、考察の外です。

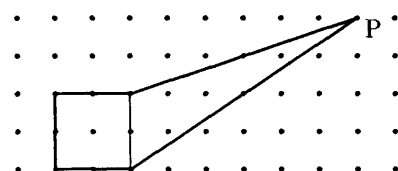


図12 遠くの点を1個増やす

2.3 長方形の場合

4辺の方向が横と縦の長方形（以下、これを“長方形”という）の場合は、公式(1)の確認は簡単です。

次の図のように各格子点を中心とする面積1の正方形をその格子点の“勢力圏”と考え、平面をこれらの勢力

圏によって分割することになります。

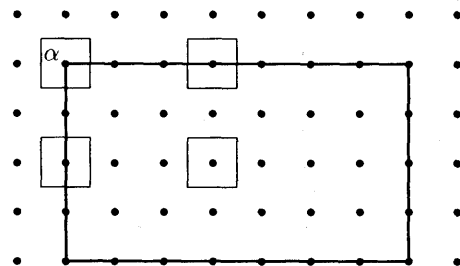


図13 格子点の勢力圏と長方形

1) 格子点が長方形の内部にあるとき、その勢力圏は完全に長方形に含まれます。また、格子点が周上にあるとき、勢力圏の1/2が長方形に含まれます。ただし、長方形の頂点となる格子点(α)は例外で、他の周上の点に比べて長方形に含まれる勢力圏の面積はさらに1/4だけ少なくなります。頂点は4個あるので、全体で1だけ少なくなります。したがって、長方形の面積 S は

$$S = p + \frac{q}{2} - 1$$

となり、長方形に対して簡単に問題が解決しました。つまり、最後の -1 は4個の頂点のせいでした。

2) 長方形の横の長さが m 、縦の長さが n のとき、

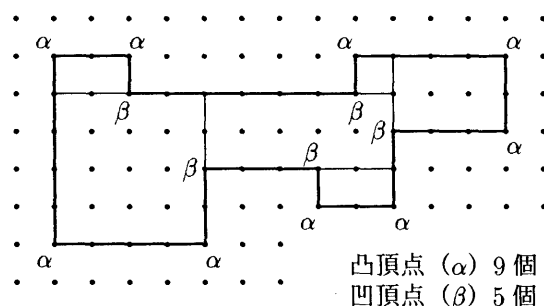
$$p = (m - 1)(n - 1), \quad q = 2(m + n)$$

であることから、

$$p + \frac{q}{2} - 1 = (m - 1)(n - 1) + (m + n) - 1 = mn$$

であるので、この方法でも公式(1)が確認できます。

この結果は下図のように辺の方向が横と縦に限られる多角形（長方形の合併）に容易に拡張できます。



凸頂点(α) 9個
凹頂点(β) 5個

図14 長方形の合併

その確認には、勢力圏の1/4が多角形に含まれる凸頂点(タイプα)の個数が、3/4含まれる凹頂点(タイプβ)より4点だけ多いことを示せば十分ですが、それは多角形を周に沿って一周するとき進行方向の角度変化の総和がちょうど360度になることから明らかです。

問題の周辺を散策してみることは、必ずしも無駄ではありません。思考を進める方向の見当がつかいたり、有効な発想の源泉になったりするからです。

3 法則を確認する

特殊な場合だけでなく、法則 (1) が一般に成立することを確認するにはどうしたらよいかを考えます。

3.1 困難を分割する

格子点を結んでできる多角形には無限の多様性がありますから、そのすべてについて個別に法則の成り立つことを直接示すことは原理的に不可能です。

まず、多角形を2つに分割することを考えてみます。多角形を2つの部分 A, B に分割することは、図のように周上の2個の格子点 P, Q を結ぶ折れ線 ℓ を定め、それを A, B の境界とすることです。

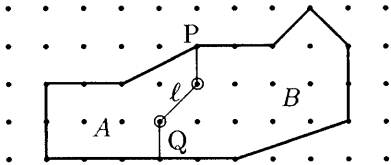


図 15 多角形の分割

境界線 ℓ 上で多角形の内部にある格子点の個数を t とします。これら t 個の点は、多角形を A と B に分割すると、 A, B それぞれの周上の点となります。ここで次のように記号を用いることにします。

	多角形	多角形 A	多角形 B
内部の点の個数	p	p_A	p_B
周上の点の個数	q	q_A	q_B
面積	S	S_A	S_B

2つの多角形 A, B が、境界線 ℓ で接続されて1つの多角形になったと考え、次の関係が成り立ちます。

$$p = p_A + p_B + t, \quad (3)$$

$$q = (q_A - t) + (q_B - t) - 2. \quad (4)$$

このとき、次の重要な性質が導かれます。

多角形 A, B において法則 (1) の成立を仮定すると、

$$\begin{cases} S_A = p_A + \frac{q_A}{2} - 1, \\ S_B = p_B + \frac{q_B}{2} - 1 \end{cases}$$

です。関係 (3), (4) を用いると、

$$\begin{aligned} & p + \frac{q}{2} - 1 \\ &= (p_A + p_B + t) + \frac{(q_A - t) + (q_B - t) - 2}{2} - 1 \\ &= \left(p_A + \frac{q_A}{2} - 1\right) + \left(p_B + \frac{q_B}{2} - 1\right) \\ &= S_A + S_B = S \end{aligned}$$

となつて、境界線で接続した多角形についても法則 (1) が成立します。すなわち、

性質 P 2つの多角形それぞれに法則 (1) が成立すれば、それらを接続した多角形にも法則 (1) が成立する。

性質 P が ℓ の取り方や t の値に依らないことに注目してください。性質 P はとても有効です。一般の多角形について法則を確認するには、それを次々と分割し、最も単純な多角形に限って法則を確認すればよいことになるからです。

こうして、法則を確認する困難さが“分割”されました。

3.2 最も単純な多角形 — その1

多角形の「単純さ」には選択の余地があります。当然、法則の確認しやすいものを選ぶことになりますが、まず形の単純さから3角形を考え、その内部または頂点を除く周上に格子点があっても構わないものとします。

3.2.1 直角3角形

いきなり一般の3角形を考えるのは難しいので、図のように長方形を対角線で半分に分けた直角3角形 PQR から始めます。直角を挟む2辺の長さを m, n とします。

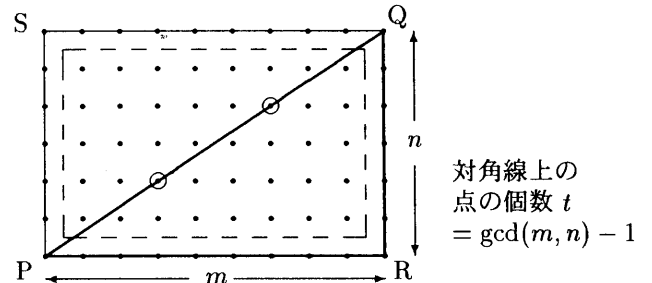


図 16 直角3角形

3角形 PQR の内部と周上の点の個数をそれぞれ p, q 、対角線 PQ 上の頂点以外の点の個数を t とすると、長方形 $PSQR$ の内部の点の個数は $2p + t$ ですから、

$$2p + t = (m - 1)(n - 1),$$

$$q = m + n + 1 + t$$

であり、これを用いると

$$p + \frac{q}{2} - 1 = \frac{mn}{2} \quad (5)$$

となり、直角3角形に対して法則 (1) が確認されました。

この議論にも t の値は必要とされないことに注目してください。ただし、 m と n の最大公約数 $\gcd(m, n)$ の意味を考えれば、

$$t = \gcd(m, n) - 1 \quad (6)$$

であることがすぐに分かります。

3.2.2 一般の3角形

一般の3角形は、それを長方形（辺は横と縦）に内接させたとき、その辺上に3点があるものと、2点しかないものに分かれます。分けて考えることにします。

1) 下図のように、3角形PQRの3頂点が長方形PSTUの周上にある場合

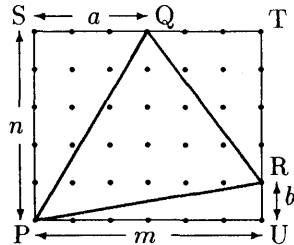


図17 一般の3角形(1)

辺PU, PS, SQ, URの長さをそれぞれ m, n, a, b とすれば、3角形PQRの面積 S は、長方形PSTUの面積から3つの直角3角形SQP, TRQ, UPRの面積の和を差し引くことによって

$$S = \frac{1}{2}(mn - ab) \tag{7}$$

と求められます。

3角形PQRの内部と周上の点の個数をそれぞれ p, q とし、さらに、3角形SQP, TRQ, UPRの内部と周上の点の個数をそれぞれ $p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3$ 、辺PQ, QR, RP上の頂点以外の点の個数を t_1, t_2, t_3 とすると、前と同様な理由により、

$$\begin{aligned} q &= t_1 + t_2 + t_3 + 3, \\ p + p_1 + p_2 + p_3 + t_1 + t_2 + t_3 &= (m-1)(n-1), \\ 2p_1 + t_1 &= (n-1)(a-1), \\ 2p_2 + t_2 &= (m-a-1)(n-b-1), \\ 2p_3 + t_3 &= (m-1)(b-1) \end{aligned}$$

が成り立ちます。この5つの等式を用いて計算すると、

$$p + \frac{q}{2} - 1 = \frac{mn - ab}{2} \tag{8}$$

を導くことができます。式(8)の右辺は(7)により3角形PQRの面積 S です。

2) 下図のように、3角形PQRの頂点Rが長方形PSQTの内部にある場合

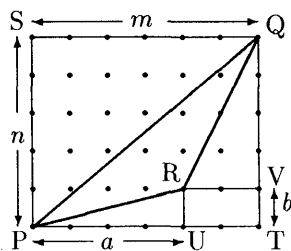


図18 一般の3角形(2)

辺SQ, PS, PU, URの長さをそれぞれ m, n, a, b とすれば、3角形PQRの面積 S は、長方形PSQTの面積から3つの直角3角形PSQ, QVR, RUPと長方形RVTUの面積の和を差し引くことによって

$$S = \frac{1}{2}(an - bm) \tag{9}$$

と求められます。この場合も1)と同様にして

$$p + \frac{q}{2} - 1 = \frac{an - bm}{2} \tag{10}$$

を導くことができます。

以上1), 2)により、一般の3角形に対して法則(1)の確認ができました。すなわち、

性質Q すべての3角形に対して法則(1)が成立する。

あらゆる多角形は3角形に分割できますから、性質Qと性質Pにより、あらゆる多角形について法則(1)の成立が確認されました。(第1の証明終り)

一般に、 m 角形は $m-2$ 個の3角形に分割されます。この性質Qと式(6)により、応用問題Aは解決です。

3.3 最も単純な多角形 — その2

多角形の単純さを、内部や周上の点が少ないことと考え、分割を徹底的に進めると、「内部にも頂点以外周上にも格子点のない3角形」に到達します。このような3角形を**最小3角形**と呼ぶことにします。最小3角形においては

$$p = 0, \quad q = 3$$

ですから、法則(1)はすべての最小3角形の面積が $1/2$ であることを意味しています。最小3角形を次の2種類に分けて、その面積が $1/2$ であることを示しましょう。

- 第1種：1辺が横方向、または縦方向のもの。
- 第2種：3辺とも方向は横でも縦でもないもの。

1) 第1種の最小3角形の場合

下図のように、PQを第1種の最小3角形の底辺とし、頂点RはPQの上側にあるとします。

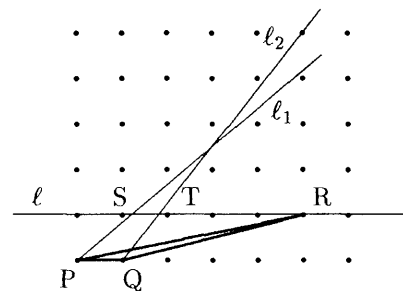


図19 第1種の最小3角形

定義より底辺の長さは1です。その高さが1であることを示すために、高さが2以上であると仮定して矛盾を引き出します（この論法がおなじみの**背理法**です）。

仮定により、底辺の端点 P, Q ともう1つの頂点を結ぶ2つの線分 l_1, l_2 は、底辺との間隔が1の平行線 l 上にある隣接2点（例えば、S, T）の間を通過しなければなりません。 l_1 と l_2 は互いに交わるまで、直線 PS, 直線 RT の間にあります。ところが、2直線 PS, RTの間には格子点は存在しないので、 l_1, l_2 の交点は格子点ではないことになり、仮定と矛盾します。

したがって、第1種の最小3角形の高さは1、すなわち、頂点 R の位置は直線 l 上に限られ、その面積は $1/2$ となります。

2) 第2種の最小3角形の場合

下図のように、第2種の最小3角形 PQR において辺 QR を最長とし、点 P は QR の左側に位置するとしても一般性を失いません。

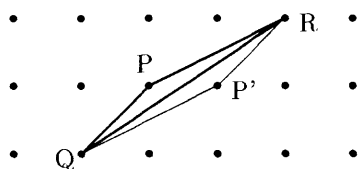


図20 第2種の最小3角形

点 P' を4辺形 PRP'Q が平行4辺形となるようにとります。3角形 P'QR も第2種の最小3角形となりますから、平行4辺形 PRP'Q の内部、および頂点を除く周上には格子点はありません。

以下、座標表現を使い、2点を $P(x, y), Q(x', y')$ とすると、 $x = x'$ 、または $y = y'$ です。なぜならば、もし $x \neq x', y \neq y'$ とすると、2点 $(x, y), (x', y')$ はこの平行4辺形の内部の格子点になるからです。

そこで、 $y = y'$ とすると、 $x' = x + 1$ であり、3角形 PRP', P'QP は第1種の最小3角形であることが分かります。その面積は $1/2$ ですから、平行4辺形 PRP'Q の面積は1、よって、第2種の最小3角形 PQR の面積は $1/2$ となります ($x = x'$ のときも同様)。

一般の第2種の最小3角形の形は、 n を任意の整数として、3点 $(0, 0), (-n, -1), (n + 1, 1)$ で表されます。

以上 1), 2) により、すべての最小3角形の面積は $1/2$ であることが示されました。すなわち、

性質 R すべての最小3角形に対して法則 (1) が成立する。

あらゆる多角形は最小3角形に分割できますから、性質 R と性質 P により、あらゆる多角形について法則 (1) の成立が確認されました。（第2の証明終り）

面積 S の多角形は $2S$ 個の最小3角形に分割されます。

3.4 証明を終わって

法則 (1) に関して2通りの証明を得ました。第2の証明は、3角形をさらに細かく分割し、最小3角形の形状を具体的に決定していますが、法則の確認だけが目的ならば簡潔な第1の証明で十分です。

“困難の分割”の性質 P がキーポイントです。あらゆる多角形が、法則を保存する接続操作によって最も単純な3角形から構成できることを示しました。この論法と数学的帰納法との類似に注目してください。

今回はまず、いろいろな多角形をしらべてある法則を発見しました（番組の中で）。どんな多角形に対しても成立すると思われませんが、論理的にはこれは**予想**に過ぎません。予想を得るまでの思考過程は**帰納** (induction) と呼ばれます。

予想を**定理**にする次の段階が、「なぜならば」で始まり「よって、～である」で終わる推論プロセス、すなわち**証明**です。前提から結論を導く思考過程は**演繹** (deduction) と呼ばれます。なお、数学的帰納法は、名前は帰納法ですが演繹法的一种です。

帰納と演繹は哲学用語で、日常的には使われませんが、英語の動詞形 induce, deduce は専門用語以外でも普通に使われます。初めての人は、漢和辞典や英和辞典などを訪ねてみるとよいでしょう。

関心がなければ「数学の証明」は退屈の極みです。けれども、面白い法則に気づいたとき、「なぜだろう。不思議だ。その理由は？」と素朴に不思議がるのが“ホモ・サピエンス”の本性です。「自分がとことん確信するにはどうしたらよいか」と静かに考えれば、証明の意義や価値や面白さが理解できます。

4 法則を拡張する

1.2節で“ひねくれた”例外の存在を紹介しました。それらを例外として排除するのではなく、逆に公式の方を修正して拡張することを試みます。

4.1 接点のある場合

多角形の周は交差することはありませんが、図のように1点で接触することはあり得ます。多角形の周が複数回通る格子点を**接点**と呼ぶことにします。

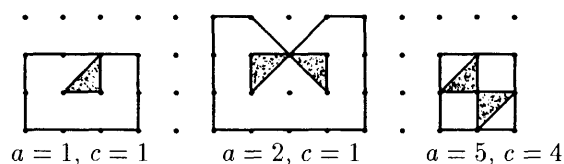


図21 接点のある多角形

接点の扱いは簡単です。多角形の周に沿ってハサミを

入れ、多角形をその台紙から切り離します。そうすると、接点は別々の頂点として通常通りに扱うことができます。周が3回以上同じ接点を通ることも考えられます。周が k 回同じ接点を通るとき、その接点の重複度を $k-1$ として、すべての接点の重複度の総和を a で表すことにします。

ハサミを入れたとき多角形がいくつかの連結成分に分離されることもあるので、連結成分の個数を c とします。連結成分ごとに公式(1)が成り立ちますから、接点のある多角形に対する公式は次の通りです。

$$S = p + \frac{q+a}{2} - c. \quad (11)$$

4.2 穴のある場合

多角形に穴が開いている場合、周は複数の閉じた折れ線になります。ここで、穴とは接点を切り離しても残るものだけを指すことにして、穴の個数を g で表すことにします。図21の多角形では $g=0$ です。

穴のある場合の公式を得るために、下図のように分離している周と周とを連絡する補助線 ℓ を引き、補助線に沿ってハサミを入れた図形を考えます。

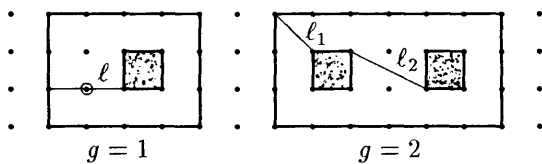


図22 接点のある多角形

穴が1個($g=1$)の場合には補助線は1本で、補助線上にある多角形内部の点の個数を t とすれば、ハサミを入れた後の内部の点は $p-t$ 個、周上の点は $q+2t+2$ 個になります。この図形に通常の公式を適用すれば

$$S = (p-t) + \frac{q+2t+2}{2} - 1 = p + \frac{q}{2} - 1 + 1$$

が得られます。この結果は l, t に依りません。

一般に、穴のある多角形に対する公式は次の通りです。

$$S = p + \frac{q}{2} - 1 + g. \quad (12)$$

4.3 一般と特殊

公式(11)と(12)を合わせ、接点と穴の両方がある場合を考えることができます。接点の重複度の総和 $a(\geq 0)$ 、連結成分の個数 $c(\geq 1)$ 、穴の個数 $g(\geq 0)$ である一般化された多角形の面積 S に関する公式は次の通りです。

$$S = p + \frac{q+a}{2} - c + g. \quad (13)$$

とくに $a=0, c=1, g=0$ の場合には公式(1)と一致するので、公式(13)は公式(1)の一般化であり、逆に(1)は(13)の特殊化になっています。

格子点の空間を3次元に拡張する一般化も興味深いものです。次の問題の解答が分かったら教えてください。

問題B 4個の3次元格子点を頂点とする4面体の内部に含まれる格子点の個数を求めよ。

あとがき

本稿のもとになったテレビ番組について、後日インターネットで検索して以下のことが分かりました。

この番組は、日本放送協会(NHK)の学校放送(TV)の中で、「わかる算数6年生」というプログラムで、2005年4月から2006年3月まで20回シリーズの1つでした。本稿で引用したものは第3回「点と形のみみつ(面積)」で、筑波大学付属小学校の田中博史先生が担当されました。当分の間、下記のサイトで授業風景のビデオを見ることができます。

<http://www.nhk.or.jp/sansu6/sansu6/03/odai/08.html>

教師用の「指導のポイント」を読んで、題材の法則がピックの定理と呼ばれていることを知りました。インターネットで検索すると、かなり多数のサイトがあり、G. A. Pick という人が1899年に発表したこと、定理の証明、応用、初等教育への活用例などが掲載されています。ただし、その数のおびただしさにはやや“興ざめ”の感があり、“情報過多”は想像力や好奇心をかえって鈍らせるかも知れない、と思いました。

散策中に浮かんだ連想を列挙して本稿を結びます(今回のテーマとの関連性はよく吟味していません)。

1) オイラーの多面体定理

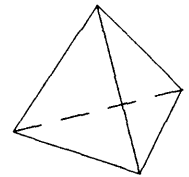
オイラーが1752年に発見したトポロジーの基本定理。

球面と同相な($g=0$)の2次元有限多面体の頂点、辺(稜)、面の個数をそれぞれ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ とすれば、

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

例 4角錐

$$\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 4.$$



2) プラニメーター (Amsler の面積計)

線積分の原理を応用して、閉曲線をなぞるだけでそれが囲む図形の面積を計算するアナログ計算機(筆者所有)。

3) ヘロンの公式

3辺の長さを a, b, c とし、 $s = (a+b+c)/2$ とすると3角形の内積 S は、 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

4) ベクトルの外積

$\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$ のベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす平行4辺形の面積(符号付)に等しい。なす3角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

これは本文の式(7)、(9)で利用した。

