

ガリレオの物理：(2) 落体と慣性の法則に至る初期の研究¹

大井万紀人

専修大学自然科学研究所²

要旨 ガリレオが天文学に移行する以前に書いた未発表の2つの講義ノート「運動に関する対話」と「運動について」を題材に、ガリレオがみつけた2つの法則、慣性の法則と落体の法則、がどのように発見されたのか、その経緯を分析した。ここでは、アリストテレスの物理学が扱う「自然的運動」つまり重力による自由落下運動の問題と、アルキメデスの機械学の範疇に含まれる天秤の釣り合いの問題とが、非自明な形で「類似性」という方法論でモデル化されていた。そしてこの方法論こそが、のちに現代物理学の基礎となる2大力学法則の発見へとつながったことがわかった。ガリレオが提示したこの「類似性」は、現代物理の観点からは「正解」には程遠い。その上、その他の力学的考察においてもさらに稚拙な考え方が入り混じり、ガリレオが現代の力学初学者と同じ水準で最初があがいていたことが垣間見える。しかし、間違った出発点から正しい結論へと続く道を見いだす能力というものが存在するならば、ガリレオの研究がまさにそれに当てはまるのではないかと思わせる。

1. 緒言

アインシュタインが「現代物理学の父」と呼んだガリレオであるが[1]、彼が行なった物理学の研究は、そのアカデミックキャリアのごく初期(1586頃-1592頃)に限られている。この理由は、望遠鏡の発明を知ったガリレオが自身の名声と栄誉のため、1610年を境にそれまでの物理研究を捨てて天文学に転向してしまうからである。天文学の研究を始めて間もなく発表した「星界の報告」以降40年近くもの間、ガリレオは天文学に専念し物理学の研究は行わなかった。しかし、コペルニクスの地動説をめぐる宗教裁判に破れ、フィレンツェ近郊のアルチェトリにある自身の別荘に軟禁状態で幽閉された晩年になって、ついに物理学に戻ってくる。ただ、それは新たな探求というよりは、1610年直前に途中で投げ出してしまった物理研究の内容を人生の最後にまとめたものであった。その内容はよく整えられ綺麗に磨かれていて、ガリレオの自尊心を再度取り戻すのに役立ったことであろう。しかし、この著作の中には、実際にガリレオが落体の法則や慣性の法則にたどり着く紆余曲折の最中に「もがいた爪痕」は綺麗に消されて残っていない。そのため、これだけを読んでも科学的な疑問は解決されないのである。幸運なことに、ガリレオは手稿や計算メモを大切に保管するタイプの学者であったため¹、我々はそれを使ってガリレオの発想を知ることが可能で

¹ “Physics of Galileo: (2) Early works leading to the laws of free fall and inertia”

² Makito Oi, Institute of Natural Sciences, Senshu University

¹ ヴィルヘルム・レントゲンの場合は、その遺書に「死後は全ての蔵書や書類を焼却処分すること」と書かれ、実際それは実行されてしまった。そのため、レントゲンの科学史研究は21世紀の現在もわからないことだけである。ガリレオの科学史研究はその意味ではレントゲン研究よりもはるかに恵まれている。

ある。そこには現代科学の観点からすると失笑してしまうような稚拙なものも多く含まれているが、現代科学にたどり着くまでの産みの苦しみを知る上で貴重な資料である。その資料のほとんどはフィレンツェの国立図書館に保存されていて、現在はインターネットを介して全て閲覧できる。科学史の研究者たちは、ガリレオが何を考え、どう落とし穴にハマったか熱心に研究してきたが、ガリレオ研究には最大の難題が存在している。それは、ガリレオのノートやメモには日付がついておらず、残された手稿に書かれたアイデアをいつどんな順番で考えついたかわからないのである。ガリレオの伝記や彼の業績をめぐる科学史の研究のメインテーマは、どのノートがいつ書かれたかを同定し、どのような流れで最後の「まとめ」にたどり着いたかを明らかにすることである²。

筆者は、特に慣性の法則にたどり着くプロセスについて興味を持ち、これまで2本の論文 [2, 3] において議論してきたが、ケプラーとの比較を通してガリレオの研究スタイルや研究環境、それにアルキメデスやアリストテレスといった古代の自然哲学からの影響などについてまとめるのが精一杯で、なかなか本筋に入り込むことができなかった。今回は、いよいよガリレオの物理そのものについて考察を進めてみたいと思うが、やはりその内容の豊富さから今回も全体像について議論することは諦めざるをえない。この論文で着目するのは、未発表に終わった初期のノートである。ただ、このノートはかなり完成に近い状態で終わっており、題名がつけられている。現代の科学史家たちはそれを "De Motu" (ラテン語で「運動について」という意味) と呼んでいる。また、De Motu の元になった講義ノートも存在し、それは「運動についての対話」という仮題で呼ばれている。これらのノートの内容は、古いギリシアローマ時代 (Antiquity) の自然哲学や中世のアリストテレス学派の影響を強く受けており、「現代物理学の父」とは到底呼べないほどの稚拙な内容も多々含まれている。しかし、それは現代でも物理の初学者の多くにとっては難解に思える、慣性の法則や落体の法則へ、どのように人類が「突破」したかを知る上で重要な内容であり考察に値する。

2. ガリレオの物理学探求

上述したように、ガリレオが物理学 (当時の自然哲学、あるいはアリストテレスの「物理」) に興味を持ち、その研究に従事したのは、ピサ大学における学生時代や母校に初めての職を得た数年間などそのアカデミックキャリアの初期に限られる。簡単にまとめると次のようになる。

1. ピサ大学の学生時代 (1581-1585): 数学 (特に幾何学やアルキメデスの応用数学) への興味を中心であったが、アリストテレスの物理学に対しても興味があった。特に、落体の法則に対してアリストテレスの説明と違うアイデアを持っていて、権威に対して反駁を行い、自身の説で取って代わろうとする素地が見え隠れしていた。ガリレオが大学で使っていた「アリス

² ただし、1960-1970 年に米国の科学史研究家 S. ドレイクが手稿の紙に付けられた透し模様を手がかりに、年代のある程度まで突き止めることに成功し、日付の問題はかなりの程度解決されたと見なされている。

トテレスの物理学」の教科書には書き込みが残されていて、アリストテレスへの反論が綴られていることが知られている。

また、医学部を退学する見込みが高まった 1583 年以降に、数学者、あるいは自然哲学者として生計を立てる決意をしたガリレオが将来に備えて準備を始めた「講義ノート」が 2 編残っている。これらは後に "Juvenilia" という題でまとめて出版されているが、未完成である上、内容的にもアリストテレスの物理学に「媚びた」点が多く、本来のガリレオがもつ独自性が感じられないという指摘がある [4]。就職を見据えた学生がそういう内容に傾くのは無理もないことだと思うが、科学的にはあまり価値がないと考える専門家も多い。

2. 「小天秤」(1585): 医学部生としてピサ大学に入学したガリレオであったが、数学と自然哲学に興味が移ってしまい退学（落第）の憂き目を見る。退学のその年、自らの就職先（数学または自然哲学のアカデミックポジション）を見つけるための助けになると考えて記したのが「小天秤」という実用書（使用解説書）である。これがガリレオの処女作であり、アルキメデスの応用数学に対して深い理解があることがわかる。
3. 「運動についての対話」(1586): アカデミックポジションを見つけた時に備えて書きためた「講義ノート」で、未完に終わっている。ガリレオが「力学」について考え始めた最初の文章である。科学史家は「運動についての対話」という略称でこの文献を識別している。当時の文体として対話形式で書き進めるのが流行していたらしく、ガリレオもそれに倣ったようである。現代でも、「数学セミナー」などの数学の啓蒙雑誌に対話形式（主に先生と学生の間の会話）が採用されているものをよく見かける。
4. "De Motu" 「運動について」(1591-1592): 執筆した時期は、最初のアカデミックポジションとなったピサ大学を辞して、パドヴァ大学に移籍した直後である。しかし、その内容はピサ大学で考えた内容である。原稿はほぼ完成しているが、ガリレオの生前中は出版されなかった。多くの科学史家が、アリストテレスの物理学とガリレオ自身の物理学との間の整合性について不十分、あるいは不満足な点があったため出版を差し控えたのではないかと推論している。これはこの論文におけるメインテーマとも関連する。
5. 「機械学（力学）について」(1601-1602): 原文は "Le Meccaniche" というイタリア語である。この著作はガリレオが収入を増やすために、パドヴァ大学の学生に売りつける目的で執筆したものとされる。ラテン語ではなくイタリア語で執筆されたのはこのためであろう。英語では "On Mechanics" と訳されるので、日本語としては「力学について」と訳するのが普通であろう。しかし、日本語訳の「力学」は Dynamics にも当てられており、混乱が生じる場合がある。ガリレオの物理は、アルキメデスが得意とした静力学や機械学 (Mechanics) と、アリス

トテレスが権威とされている動力学や自然哲学 (Dynamics) を整合させる形で進展するので、Mechanics はあえて「機械学」とここでは訳した方がよいと思われる。"Le Meccaniche"の内容が、アルキメデスの物理に基づいていることを強調するためである。

6. "Two New Sciences" (1638): 最後の著作であり、ガリレオがかつて行ない長年放置した物理学研究を人生最後にまとめたものである。紆余曲折した中途半端なアイデアや誤りは一掃され、アインシュタインを感動させた「現代力学の原点」が美しく整理された形で展開される。現代の物理学者が引用するガリレオの業績のほとんど（斜面上の運動や慣性法則、あるいは落体の法則や放物軌道など）はこの著作からの引用である。

「機械学について」は研究書というよりは経済的な目的で書かれたものであるらしいので考慮しないことにすると、最後の著作である"Two New Sciences"と、その前に書かれた"De Motu"との間には40年余りの時間が経過していることがわかる。

ガリレオが天文学に転向したのは1610年である。「機械学について」から数えても物理学研究の最後の著作から8年近くのギャップがある。この間にガリレオが何をしていたかということ、実は物理研究における重要なステップを駆け上がっていたのであった。ガリレオの物理研究の代表とされる落体の法則や慣性の法則の完成形にたどりついたのも、この「ギャップ期間」であるとされる。しかし、すでに書いたようにガリレオの手稿には日付がない。8年以上のこの「ギャップ期間」の時期におけるガリレオの物理研究の内容を知るには、手稿やメモに頼らざるを得ず、その順番が明らかにならない限り、ガリレオの科学史的研究は困難を抱えたままになる。今回は、このギャップの時期や、晩年における「完成形」のガリレオ理論には着目せず、未完成あるいは稚拙な水準にある初期の研究だけに目を向ける。人間の直感に頼る理解しかできなかった古代文明やルネサンスの人々が、いかに現代物理へと跳躍したのかを追いかけてみたい。

3. "Juvenilia": 最初期の「講義」ノート

ピサ大学医学部を退学することを覚悟したガリレオは、医学生としての勉学をやめてしまい、数学者、あるいは自然哲学者としてアカデミックポジションを得るための「就職準備」を始める。その手始めとして書き始めたのが"First Essay"と呼ばれている「講義」ノートで、アリストテレスの物理学についての忠実な解説を主とする内容であるが、途中で終わっている。もう一つの講義ノートも残っており、そちらはアリストテレスの「分析論」(Posterior analytics)の解説を試みているという。この2つの講義メモを含む最初期のノート類をまとめたものは、後に"Juvenilia"という名前で刊行された³。その内容はDrakeの著書[4]を読む限り「考察に値しない」と評されていて、そ

³ 英語の juvenile というのは「未成年」という意味である。

の理由はアリストテレスの物理学の内容に忠実に沿った内容であり、本来ガリレオが抱いている「アリストテレスの自然哲学への反駁」が伏せられているからだという。科学史家がガリレオに着目する最大の理由は、直感に基づく、Antiquity（ギリシアローマ時代）時代の思想哲学から、どうやって現代科学の考え方へ人類の思考が飛躍したか知りたいからであって、就職を有利に進めるためだけの目的で書かれ、Antiquityに「媚びた」内容の"Juvenilia"の内容は科学史的にも心情的にも自明な内容であって考察に値しないということなのであろう（就活生が採用側に媚びた内容の作文をするのは心情的にはよくわかる）。したがって、この論文でも Juvenilia は取り上げないことにする。

ただ、ここでひとつだけ着目したいのは、アリストテレスの"Posterior analytics"の訳についてである。この著作は日本語で「分析論後書」と訳されているが、「分析論後」+「書」と読むと意味がわからなくなる。この題名は現代風に訳せば「分析論（後編）」とすべきものである。実際、Prior analytics という著作もあり、こちらは「分析論前書」と訳されている。こちらも「分析論（前編）」と書いた方が誤解がないと思われる。また、prior と posterior の語源であるラテン語はヨーロッパ文化圏における「古語」のようなものであるから、日本語にしてみれば「古文」である。雰囲気を残したいのであれば「分析論（上巻）」「分析論（下巻）」と訳しても良いのではないだろうか？

4. 「小天秤」

この著書は科学的な内容で書かれた、ガリレオの最初の著作である。その内容は技術的、工学的であり、物理的な内容ではない、とよく形容される。要は、よく宝石商などが利用するタイプの天秤使用法の指南書であり、天秤の仕組みの解説や、より正確に操作するためのヒントなどが書かれているそうだが、残念ながら原著が入手できず今回は分析することができない（現在英訳を注文中）。

5. 「運動についての対話」

この講義ノートも就職前に準備したものであるが、当時の流行りの文体「対話形式」が採用されている。ただし、この著作自体は未完成であり、その内容は後の"De Motu"によって完結される。S. Drake の著作 [4] に概要が載っていて、一応内容を知ることは可能であり、その概要をここでまとめてみたい。この論文では、これ以降この著作（講義ノート）を「対話」と記すことにする。

「対話」には6つの疑問が掲げられ、それについて答える形式で内容が進展する。しかし、最後まで答えているのはわずか2つの疑問に対してのみであり、残りの4つに関しては記述が途中で終わっている。「最後まで答えている」というのは「現代物理学的に正しい記述をしている」というわけではないことに注意する必要がある。あくまで「書き切った」というだけの意味である。しかし、未完の議論の中にガリレオの考え方の変遷が見て取れる。以下、6つの疑問について若き日の

ガリレオの考え方を見ていきたい。

5.1 空中で物体は静止できるのか？

より正確に書けば、最初の疑問は「空中に投げ上げられた物体は転回点で静止しているとみなせるのか」というものである。アリストテレスによる伝統的な考え方によると「物体は空間で静止できる」⁴。しかし、若き日のガリレオは「転回点における物体は静止していない」と答えていて、アリストテレスの考えに「喧嘩を売って」いる。S.Drake が指摘しているように、これは「飛んでいる矢は止まっている」という Zeno のパラドックスと関係している。物体が空中に静止できるかどうかという問題は、は Antiquity の時代においては運動の方向を決める上で非常に重要だったが、現代物理学の観点からすると静止というのは速度が零値をとるだけのことであり、連続変化量（実数）の一つの値にすぎないから特筆すべき状況ではない。

中間値の定理を利用すれば、実数 t に依存するある連続関数 $f(t)$ が t_0 で正值を取り、 $t_2 (> t_0)$ で負値を取れば、 $f(t_1) = 0$ となるような、 $t_0 < t_1 < t_2$ を満たす t_1 を必ず見つけることができることを証明できる。空中で静止するかどうかというかつての「難問」は、現代の科学者にとっては、 t を時間とみなし、上の中間値の定理を適用することで容易に解決できる。あるいは、 $t_0 < t_2$ に対して、 $f(t_0) > 0, f(t_2) < 0$ が成立し、 $t_2 - t_0$ が十分小さい値に取れるならば（つまりこの区間で $f(t)$ が単調減少することが期待できる程度に小さな値ということ）、 $t_0 < t < t_2$ を満たす実数 t においてテイラー展開を行うと、

$$f(t) \simeq f(t_0) + (t - t_0) \frac{df(t_0)}{dt} \quad (1)$$

という形に線型近似できるから、 $f(t_1) = 0$ となるような t_1 を t_0 と t_2 の間の近傍で見つけられることは直感的にもわかる。

また、速度が二点関数か、それとも単なる関数か、という疑問にも関係している。現代でも、小学校で最初に速度について習うとき、それは「二点関数」として導入される。つまり「平均」としての速度である。

$$v(t_0, t_1) \equiv \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (2)$$

平均値としての速度（つまり二点関数）が 0 であるということは、 $x(t_0) = x(t_1)$ を意味する。もし空中で静止するというのであれば、物体は宙に浮いた状態で同じ場所に居続けるはずで、これは見た感じの直感、あるいは $t_1 - t_0$ が有限にしか取れない実際の観測と合わない。若き日のガリレオの結論は理解できなくもないのである。現代の古典力学では、 t_0 と t_1 の差が無限に 0 に近づく

⁴ 後述するように、実はアリストテレスの考え方は、投げ上げた物体に対しては適用することはできないのだが。

極限において、速度は「一点関数」、すなわち $v(t)$ として定義される。これは物理学に対する「微分」の最初の応用であって、当然ながらニュートン以降の時代に確立した内容である。ガリレオはまさに、ニュートンへ続く道を切り開いた「パイオニア」であったが、まだ若き日のガリレオは「瞬間」、すなわち「極限」のところで足踏みをしていたことが、「対話」における考察からわかる。ガリレオの代表的な研究となった「斜面上の運動」においても速度の問題が重要になるので再び議論したい。

速度について現代的な考えに至るためには、上で見たように数学、特に解析学（微分積分学）における連続とか極限といった概念を持っている必要がある。ニュートンが誕生するほぼ1世紀前に生きたガリレオ⁵や、その先人たちが直感的な観察に基づき、静止と運動の間に概念的な「深い溝」があると考えてしまったのは無理もないことなのかもしれない。

実は、物体が静止しているという物理的な状況には2種類ある。一つは上で議論した速度が零値をとる「一瞬」の場合であるが、もうひとつは力の釣り合いが成立している時である。この場合は「静止し続ける」、つまり静止時間が有限時間となる。現代の古典物理学の観点から後者の状況を考えてみよう。ある質点に対する運動方程式（ニュートン方程式）は

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j \quad (3)$$

である。ただし、この方程式の右辺は、質点に N 種類の力 \mathbf{f}_j ($j = 1, \dots, N$) が加えられている状況を意味していて、これはいわゆる合力と呼ばれているものである。合力が零ベクトルのとき、力の釣り合いが成り立っているという。質点にかかる全ての力が釣り合っているとき、定義により合力は0であるから、運動方程式は自明な解

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \quad (4)$$

をもつ。ただし \mathbf{v}_0 は定ベクトルである。慣性系をうまく選べば（ガリレオ対称性の故に）、この解は「質点が静止している」状態に相当する。これが力の釣り合いの場合の「静止」である。したがって、釣り合いが成立している限りこの静止状態は持続し続けるから、有限の静止時間をもつと考えるのが普通だろう。ガリレオが思い浮かべたのはこのタイプの「静止」であった。そうだとすると、物体が空中で釣り合いの状態に到達して静止するのは「不可能」である。これが若きガリレオが「転回点で物体は静止できない」と考えた理由である。

以前の論文で指摘したように [3]、ガリレオはアルキメデスの「機械学」すなわち静力学に深く影響されていたので、静止の概念を釣り合いによって説明することを選んだのであった。さらに、

⁵ 正確には78年後。ちなみに「ニュートンはガリレオが死んだ年に生まれた」と言われることがあるが、どうやらガリレオが死んだ翌年の1643年に生まれたようである。また、ガリレオは77歳で1月8日に死んだのに対し、ニュートンが生まれたのは1月4日。

伝統的なギリシアの自然哲学は、アルキメデスの静力学とアリストテレスの動力学に分割されていて、両者の交わりはほとんどなかった。両者をくっつけたのがガリレオ本人であるが、「対話」の段階ではそれがまだ不十分な水準にあったのである。

しかし、動力学を「得意」としたアリストテレスが、微分積分の観点から正しい答えである「転回点で質点は静止している」と考えたわけではないことには注意しておく必要がある。Drabkinの解説[5]をみるとわかるように、物体はその「重さ」に応じて、宇宙空間における「自然な位置」というものを持っているとアリストテレスは考えていた。簡単にいうと、重いものほど「宇宙の中心」に近いところに位置するのが「自然」である、という直感に基づく考え方である。忘れてはいけないのは、アリストテレスの考えでは宇宙の中心とは地球の中心であるという点である（したがって、コペルニクスの説が正しいとなると、宇宙の中心についての宗教的信念に破滅が訪れるのみならず、アリストテレスの物理も破綻してしまうことを意味し、あたかも磁気単極子が発見された場合のマクスウェル方程式のような「大混乱」に陥るのである。）。

したがって、「重いもの」は地球の中心に向かって落下し続け、地球の中心の手前のどこかにあるはずの「自然な位置」に到達したところで「静止し、そこに居続ける」と考えたのである。（実際には大地が邪魔してそこまでたどり着けないが。）当然ながら、重いものほどその自然な位置は地球の中心に近い場所となる。そして究極に重いものもつ自然な位置こそ地球の中心となるのである。

一方「軽いもの」は地球の中心から遠ざかる方向に運動する。例えば、水中に沈めた木片がそのような運動をする（炎の正体がわからなかったルネサンス期以前には炎も「軽いもの」の一種であった）。実際には水が途中で終わってしまい、その上に空気が現れるので、木片は水面で止まってしまうが、もし水がずっと長く上方に伸びているのであれば、木片はそのどこかにあるはずの「自然な位置」において静止すると考えたのである。したがって、アリストテレスの考えた「空中でも静止できる」というのは、例えばヘリウム入りの風船のようなものが、空のどこかにあるはずの「自然的位置」において、「静止し続ける」状態であって、連続関数が零点を切る瞬間のようなものではなかったのである。

アリストテレスの物理において面白いと思う点は、自然な位置よりも上方（つまり地球の中心と反対側）にあるものは「重く」、下方（つまり地球の中心側）にあるものは「軽く」となるという点である。たとえば、鉄球は「重い」ように思えるが、自然な位置を通り過ぎてしまうと「軽く」なるので、地球の中心と反対方向に「浮かび上がる」のである⁶。ヘリウムの風船もそうで、自然な位置を通り越すと「重く」なるので、落下し始めると考えるのである。つまり、運動の向きは、そ

⁶ 「これは調和振動の問題と同じではないか」と思った人は多いはずである。しかし、アリストテレスの考えでは調和振動の「平衡点」で物体は必ず止まることになっている。これは正に「慣性」の考えが欠けているからである！

の物体が自然な位置の上下どちらにあるかで決まるとというのがアリストテレスの考え方である。そして、自然な位置では「静止し続ける」のである。

さらにアリストテレスは、運動を2種類に分類していた。自由落下のような重力が関わる運動を「自然的運動」と呼び、一方人間の手で押し下りして物が動くような運動を「強制的運動」と呼んだ⁷。アリストテレスは強制的運動は「物理学」の範疇にはないと考えたので、その分析や考察をほとんど行わなかった⁸。したがって、中世の時代にアリストテレスの物理の研究が進んでくると、自然的運動と強制的運動の区別ができず、アリストテレスの物理だけでは説明が不可能な現象が出てきた。その一つが、「手で上方に投げ上げた物体の運動」である。「対話」においてガリレオが取り上げた最初の問題がまさにこれなのである。

鉄球のようなものを手で投げ上げる状況を考えてみよう。手が物体に接しているうちは当然「強制的運動」である。しかし、鉄球が手を離れた直後からは「強制的」とは呼べなくなる。アリストテレスは強制的運動の排反事象が自然的運動だと定義していたので、(強制的と呼ばなくなった)投げ上げられた鉄球の運動は「自然的運動」でなくてはならない。しかし、鉄球は「重い」ので、地球の中心に向かって運動するはずなのに、「軽いもの」の運動のように、地球の中心から離れる方向に運動している。これは明らかに矛盾であるという訳である(絶句....)。ルネサンス期において、この「投げ上げられた物体の運動」は最大の「難問」のひとつであった。

アリストテレスは、投げ上げた物体の問題を「想定していなかった」ので、当然、これに答えられない。ガリレオが「転回点において物体は静止しているのか」という疑問をもったのは、アリストテレスの物理では説明できないからであった。したがって、アリストテレスの「物体は空中で静止できる」という考えは、そもそも間違った観点から出てきた間違った説明なのである。その意味で、ガリレオはアリストテレスの一步先に行くことができたのだが、皮肉なことに字面の上ではアリストテレスの方が「合っていた」、つまり転回点では投げ上げた物体は空中に静止しているのである。ただし、それは「一瞬」だけのことである(アリストテレスはこの部分を正しく理解していなかった)。

ガリレオは、「対話」においては間違った結論を出してしまったが、それは建設的な間違いであったと言っていいだろう。ガリレオは「一瞬だけ静止する」という考えには結局到達できなかったが、まったく異なる脈絡からアリストテレスの物理学を脱却することに成功する。すなわち、自然的運動と強制的運動は互いに排反の関係にあるのではなく、実はもう一つの運動形式「中性的運動」というものが存在する、と考えたのである。これは「対話」ではなく、De Motuにおいて成し遂げら

⁷ 英語では「強制的」(forced)と「力」(force)が同じ単語で表され、「力」の概念が「強制的運動」から発生したという歴史的経緯を推測しやすいが、日本語訳では異なる漢字を当てたためそのあたりを感じにくくなっている。

⁸ 「臭いものには蓋をしろ」ということなのであろうか？現代科学の観点からすると「絶句」せざるをえない。

れる。「中性的運動」の考察では、アルキメデスの機械学（特に天秤、つまり力のモーメント）に基づく、斜面上の運動の考察が重要な役割を果たす。どちらもガリレオの十八番の題材であるが、特に斜面上の運動は高校物理でも紹介されているから、一般にも広く周知されていることであろう。

5.2 鉄球と木球の運動

2番目の疑問も自由落下に関するもので、「鉄球はゆっくり動き始めるのに対し、木球は急激に速度を上げて運動することができる。しかし、やがて時間が経過すると鉄球が木球よりも速くなり、追い抜くのはなぜか？」というものである。これに対する現代物理の観点からの解答はありえない。なぜなら、このようなことは起きないからである！

この疑問はピサの斜塔の実験を行なったガリレオのものとは（正直）思えないほど驚きの内容である。ガリレオも我々が中学生だったときと同じところからスタートしたということがよくわかる。おそらくガリレオが生きていれば、恥ずかしさのあまり、この手稿だけは焼いてしまおうと思ったはずである。なぜこのような疑問が出てしまうのか、中学生の頃に戻ったつもりで推測してみたい。

実は、この問題に対する「修正」に繋がる考察は、De Motuの第1章につらつらと書かれている。その中身は、「重さ」の定義についてである。そこでは密度と質量の区別がくどいほどの調子で書かれている（その詳細はDe Motuのところで後述することにする）。まず、「鉄が重い」そして「木が軽い」という先入観がある。もし「重いものほど速く落下する」というだけであるなら（つまり、材質や形状などには依存せず、単に重さだけで落体の法則が与えられているなら）、同じ質量の鉄球と木球を持ってきて落下させれば、ガリレオがここで疑問に思ったような「物理現象」は発生しない。しかしこれは小さな鉄球と巨大な木球の落下の比較を意味し、通常想定しているような実験ではないはずである。そこで、「同じ大きさ（体積）のとき」という部分が、後に（「対話」の後に執筆された"De Motu"には）加えられるのである。これは密度を意味する。この考察からわかるのは、ガリレオはまだ「重さ」の意味をはっきりと理解していた訳ではなさそうであるという点である。

ガリレオがあたかも大発見したかのように書いている「同じ大きさの木球と鉄球をもってくれば」という記述であるが、この場合当然鉄球の方が重くなり、アリストテレスの落体の法則が正しいならば、鉄球の方が速く落ちるはずである。しかし、2つ目の疑問でガリレオはその速度は時間変化すると言っている。つまり、最初は木球の方が速く動き、後から鉄球に抜かれていくと思いついでいるのである。これは後で見ると、物体の落下運動はいずれ終端速度に到達するという誤った思い込みから来るものであろう。加速度運動が発生する落下初期の段階と、速度が収束し終端速度に到達した後の段階で、速度の関係は変化するとガリレオは示唆しているように思える。アリストテレスは、落下を開始してからの経過時間に関わらず、常に重い物体の方が速く落下すると

主張しているが、ガリレオはその主張に「反抗」しているのである。

自分の考えの正当性を証明しようと、若き日のガリレオは必死に落体を見つめ観測を続けたはずである。しかし、人間の目に落体の運動はあまりにも速く、正確な結果を記録することはできなかっただろう、というのがS.Drakeの分析である。つまり、上述の二点関数としての速度（平均速度）と一点関数としての速度の問題がここで再度浮上してくるのである。実際、現代の工学においても速度は二点で位置と時刻を測定し、「計算」によって算出される物理量である。ある意味、「デジタル化」によって近似された連続量と言えるだろう。測定時間の間隔をできる限り短くし、近似精度を上げようとする努力がなされているのは、速度が一点関数だと現代科学は知っているからである。後にガリレオが自由落下の直接測定を諦め、斜面上の運動に切り替えるのは、測定を容易にするためであった。おそらく、「対話」での考察がきっかけとなり、より正しい「落下」の観測をする必要性を後に感じたのであろう。その意味で、この問題における「誤認識」こそが全ての始まりだったと言えなくもない。

この問題では、静止状態から落下し始める際の「加速しやすさ」についての誤認識もある。これは慣性質量と重力質量の区別とに関係していると思われる。同じ大きさ（体積）を想定していたガリレオの心には、鉄球の方が重く見えていたはずである。この「重い」というのが、慣性質量に相当していると見るのは異論がないだろう。したがって、手で押すといった「強制的運動」を想起すれば、一定の力をかけたとき、慣性質量が大きな方が「動きにくい」と考えるのは、慣性の法則を知らなくても容易に想像ができる。しかし、ガリレオが取り上げているのは自由落下の問題である（つまり「自然的運動」）。したがって、重力の性質がわからないと本来は答えが出ない問題である。ニュートンが示したように、重力は「質量」に比例して大きくなる。この時の質量が「重力質量」である。この宇宙では、なぜか重力質量と慣性質量が等しいので（等価原理）、動きにくいもの（慣性質量が大きいもの）ほど、（重力質量により）大きな重力で引かれるのである。慣性の効果と重力の性質が「相殺」することで、自由落下は質量によらない「ユニバーサル」な運動になるのである。慣性質量を m_i 、重量質量を m_g と書くと、現代の古典力学では、

$$m_i \frac{dv}{dt} = -m_i g \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = - \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \cdot g \quad (5)$$

と表すことになり、 $m_g/m_i = 1$ のとき運動は質量によらないことがわかる。

多くの人は、この結果が有名な「ピサの斜塔の実験結果」だと思っている。しかし、後で議論するように、ガリレオは、材質が異なる2つの物体でも質量さえ同じならば同時に落下すると考えていた訳でもないし、材質が同じだとしても質量が違う2つの物体が地面に同時に着地すると考えていたわけでもない⁹。ガリレオがこのとき考えていたのは、密度が同じ物体はその重さに関わら

⁹ すぐ下でも考察するが、加速過程の詳細が質量によって異なるかどうかについてガリレオは議論していない。

ず、その「終端速度」が同じ値に収束する、ということであった（ただし、媒質は共通とする）。すなわち、密度の異なる物質の場合、同じ質量を持っていても異なる終端速度になる可能性があるから同時に着地するとは限らないと考えていたようである。さらに、若きガリレオは加速度運動は落下初期に限られると考えてしまったので、重さの違いが原因となってこの加速過程で速度変化に差が出るならば、たとえ終端速度が同じになったとしても、着地するタイミングはズレてしまう。ガリレオが行なったという「ピサの斜塔の実験」は（もし実際に行なっていたとするならば）実は現代の古典力学のお手本になるようなものではなかったのである。

ガリレオがこの2つ目の疑問で問題設定を誤ってしまったのは、強制的運動のようなものとして重力の効果を考え、いつでも「一定の大きさ」で物体を動かす作用と思い込んでしまったのが理由なのであろう。もちろん、等価原理の壁はあるが、それを差し置いたとしても、重力は重いものほど強く作用するという性質と、慣性は重いものほど強く働くという性質の理解なしには、（空気抵抗のない真空中）鉄球と木球の落下速度も落下の様相もまったく同じであるという現代の古典力学の結論にはたどり着けないのである。このときガリレオは慣性の法則にも正しい落体の法則にもたどり着いていなかったで、「対話」に書いてしまったような稚拙な疑問を持っていたとしてもそれは不思議なことではないのである。

5.3 3つ目の疑問

「対話」における3つ目の疑問も自然的運動と強制的運動における、初期段階の加速の違いについての疑問である。これは上で考察した内容によって説明できる「誤解」なので、スキップする。

5.4 浮力の問題

4つ目の問題は「浮力の問題」といっていいだろう。つまり、物体とそれが存在する媒質との組み合わせにより、物体の落下運動／浮上運動の様相が異なることに対する疑問である。例えば、鉄球は空気中でも水中でも「落下」する、つまり地球の中心めがけて（自然の位置まで）落下する。ただし、その落ち方は空気中の方が速い。一方、木球は空気中では落下するが水中では浮上してしまう。このような運動の振る舞いが物体や媒質の組み合わせによって異なるのはどうしてなのか、という疑問である。

S.Drakeによると、この疑問に関する考察が、「対話」の6つの疑問の中でもっとも丁寧に行われており、この講義ノートのハイライトとみなすべき、だということである。これは、アルキメデスの機械学に自身の基礎を置いたガリレオなら当然のことであろう。アルキメデスの原理、すなわち浮力の原理とこの問題は関係しているからである。

まずは現代の古典力学の手法（高校物理といってもよい）で問題を整理してみよう。密度 ρ_m の

媒質中で密度 ρ_b の物体に作用する力（重力）は（地球の重心を正の方向として）

$$F = (\rho_b - \rho_m) V g = \left(\frac{\rho_b}{\rho_m} - 1 \right) \rho_m V g \quad (6)$$

と書くことができる。 V は物体の体積である。この式を使って、まずは空気中における「浮力」を見てみよう。上の式を変更すると

$$F_a = \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \rho_w V g \quad (7)$$

となる。 ρ_w は水の密度（1気圧、20度C）で 998.20 kg/m^3 、一方 ρ_a は空気の密度（1気圧、20度C）で 1.204 kg/m^3 。 ρ_b/ρ_w を比重といい、工学技術関係でよく利用される。その値は材料関係のHPや資料などで容易に手に入る。例えば、鉄は7.8、赤松は0.53、カラマツは0.50だという[7]。空気の比重は密度データを利用して直接算出すると $\rho_a/\rho_w = 1.204/998.20 = 1.2 \times 10^{-3}$ となる。このデータを用いると、

$$F_a = \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} - 1.2 \times 10^{-3} \right) \rho_w V g \quad (8)$$

である。空気の比重はとても小さいので「浮力」はほぼ無視できる。したがって、鉄球の場合も ($\rho_b/\rho_w = 7.8$)、木球の場合も ($\rho_b/\rho_w \simeq 0.53$)、 $F_a > 0$ となることは明らかであり、空気中ではどちらも「落下」運動をすることが確認できる。一方、水中では

$$F_w = (\rho_b - \rho_w) V g = \left(\frac{\rho_b}{\rho_w} - 1 \right) \rho_w V g \quad (9)$$

となるので、鉄球では $F_w > 0$ 、木球（アカマツやカラマツの場合だが）は $F_w < 0$ となり、鉄球は水中で落下、木球は水中で浮上することがわかる。また、鉄球は空中でも水中でも落下することは落下するが、水中における浮力の方が空中よりも大きいので、水中において「よりゆっくりと落下」することもわかる。

以上は重力の法則が確立した上でのアルキメデスの原理の表現であった。オリジナルのアルキメデスの原理は、「重さを持つ物体が液体中に沈められたとき、物体によって押しのけられた媒質の体積に相当する媒質の重さの分だけ、この物体の重さは減少する」という表現で表される。ガリレオの *De Motu* を読むとわかるが、ルネサンス期においても物体の密度とか、質量とかといった概念はまだしっかりと定義されていなかった。したがって、「重くなる」「軽くなる」といった大雑把な表現が用いられたのである。たとえば、ひたひたに水を張ったコップを受皿に乗せ、水中に静かに鉄球を沈めると、鉄球の体積分だけ水が受皿に溢れる。溢れた水の「重さ」を測れば、水中における鉄球の浮力が引き算によって計算できる、つまり水中の鉄球は少しだけ「軽くなる」という形で浮力が表現される。アルキメデスが浴槽に入った時脳裏に閃き「エウレカ」と叫んだアイデアがまさにこれである。

さて、若き日のガリレオが未完の「対話」において到達した考えは、「材質が同じで、同じ媒質中ならば、全ての物体は（重さによらず）同じ速度で落下する」というものであった（この結論は4つ目の疑問の全てに答えているようには思えないが）。これは一見ピサの斜塔の実験を思い起こさせるが、実は逸話が示すほどこの実験は簡単なものではなかった可能性があることに注意しないといけない。また、この答えと2つ目の疑問（鉄球と木球の自由落下の問題）が矛盾しているようにも見える点にも注意しないといけない。

まずは、この結論に至った背景に浮力の原理がどのように関わっているか見てみる。アルキメデスの原理によると、物体によって除かれてしまった体積に相当する媒質の重さの分だけ、媒質中の重さは「軽くなる」、つまり「重さが消えて無くなる」ように見える。アリストテレスの物理では「落下速度は重さに比例する」わけだから、物体の重さが媒質の効果によって消えるか、共通の値になれば、全ての物質が同じ速度で落下してもよいはずである。これは現代の古典力学における落体の法則の導出とは全く異なる（上述したように、慣性質量と重力質量の相殺によって、落体の法則が質量によらないという「ユニバーサリティ」は得られる）。しかしながら、ガリレオがこのとき考えたのはユニバーサリティではなく、specific gravity（比熱と訳すこともあるようだが、ここでは物体と媒質の密度差と解釈するのが正しいようである）によってきまる物質ごとの終端速度であった。つまり物質固有の性質としての「共通速度」という考えまでにはたどり着いたが、落体の法則は物質によらず常に同じ形で表現できるというところにはたどり着いていなかったのである。

実は、「共通速度」の発想はガリレオ独自のものではなく、「対話」の30年ほど前にすでに提案されていたことが知られている。提案したのは、イタリアのGiobanni Battista Beneditti（英語ではGianbattista Benedittiというらしい、日本語ではベネディッティと書くことにしよう）である。1553, 1554, そして1585年の論文において、「同じ材質だが、異なる重さをもつ物体が、同じ媒質中を自由落下するとき、その速度は共通となる」と述べている。「ピサの斜塔の実験」でガリレオが示そうとしたことを、先んじて発表した学者がいたことは一般には広く知られていない（筆者も正直驚いた）。

ベネディッティの主張の根幹にあるのは「物体の運動は重さではなく、specific gravityである」というアイデアだとわかった。共通の材質ということは密度が同じだということである。したがって、重さが違って密度が同じなだけだから速度が共通という訳である。しかしこの考えに基づけば、落下運動の様相は物質固有の性質ということになる。これは、現代の古典力学における落体の法則、つまり、どんな物質でも同じ速度で自由落下するという法則とは異なる。

ガリレオが「対話」の中で示したのは、（下手をすると剽窃の恐れがあるほど）ベネディッティの理論とほぼ同じである。若きガリレオは、「対話」の中で、それほど遠くない過去に発表された「有名な研究結果」についてまったく言及していないそうであるから、あたかも自分が独立に思いついたように見せかけているように見える（これはS. Drakeをはじめ、多くの科学史家が指摘し

ていることである)。「対話」は「就職活動中」に書かれた講義ノートであるから、多少の「盛り」(粉飾)があるのは仕方ないとしても、後年立派な学者になる人物であるのだから、もう少し謙っておいた方がよかったかもしれない。しかし、ガリレオという人物は出世欲が強く、金銭欲も結構あったそうであるから、こういうハッタリ的側面こそが、まさに「ガリレオ」なのかもしれない。

ただ、ガリレオが「対話」で取り上げた媒質中の落下の説明が完全な剽窃だとは言いきれない点があるとすれば、それはベネディッティの理論に「浮力」のアイデアを足した点であろう。specific gravity、つまり物体と媒質の密度差と解釈すべきものは、まさに浮力の原理に他ならない。ベネディッティが言い忘れたこと、あるいは知らなかったことを、ガリレオが「浮力の原理と首尾一貫している」と述べて、ベネディッティを支持したと考えれば、少しは若き日のガリレオに対して前向きな気分になれるだろう。

さて、ベネディッティもガリレオも、材質が共通の2つの物体が同じ媒質中で自由落下するとき、たとえそれぞれの重さが異なっても「同じ落下速度」になるという考えにたどり着いたわけであるが、これは後年のガリレオの「落体の法則」と同じ結論なのであろうか？ガリレオが晩年にまとめた"Two New Sciences"では、落体は加速度運動に従うと書かれている。加速度運動に従う場合の「同じ落下速度」という意味は、刻一刻と変化する速度変化の仕方が一致しているという意味である。「対話」の中で取り上げられたガリレオの考えやベネディッティの理論は、すでに同じ水準に到達していたと言えるのであろうか？答えは否である。S.Drakeが指摘しているように、この当時、まだ物理の概念が色々なものに対して確定していなかった。「速度」も現代の意味、つまり微分を用いて定義する連続変化量としては定義されていなかった。それがために、「物体は転回点で静止しているのか」といった疑問が(上述したように)出てきてしまうのである。ガリレオもベネディッティも、速度を一点関数としてはみていなかったのは確実である。とすれば「平均値」として、あるいは「等速」の場合のみを考えていたことになる。どうやら、答えは落下が「等速」の場合だけを想定していた、ということになるらしい。

しかし、自由落下は等加速度運動の典型例であり、速度はどんどん増加、つまり加速する。したがって、等速が出てくる余地はないはずである。ベネディッティがこのあたりをどう考えていたかは今回の論文では明らかにできなかったが、ガリレオに関してはそれが判明している。これは、S. Drakeの著書[4]にも書かれているが、より具体的な説明はI.E.DrabkinによるDe Motuの英訳に付された解説の中[5]に書かれている。それによると、ガリレオだけでなく、多くの自然哲学者はすでに自由落下が加速度運動であることを察知していたが、その速度があまりにも速いために、落体の実験や観測を行なっても正しい運動の様相を記録できずにいた。また、数学的に速度を正しく定義できないが故に、加速度運動を適切に表現できずにいたこともある。解析学の進歩が不十分の時代においては、微分で定義される連続変化量を考えること自体が無理であった。

そこで、ガリレオは等加速度運動は過渡的な運動状態であり、一定時間が経過すると、全ての物

体が「終端速度」に到達するはずだと考えた。終端速度は「等速」であり、それ以上の時間変化は起きない。したがって、解析学がない時代でも、「正しい速度」として力学の中で応用することができたのである。そして「過渡的な」加速状態は「運動学の問題としては瑣末なこと」とみなして無視することにしたのである。もちろん、落体の法則の正しい表現を見つけたのはガリレオであるから¹⁰、この状況は随分後になってから改善される。

実は、「終端速度」という概念は現代の古典力学で定義されるものが「正しい」ものであり、それはガリレオが用いた用法とは異なる脈絡で使われる。一応その内容をここで確認しておこう。空気抵抗に相当するような「摩擦項」が速度の一次に比例するものとして、重力に関する運動方程式を書き下すと

$$m \frac{dv}{dt} = mg - m\gamma v \quad (10)$$

となるが、この微分方程式の解は

$$v(t) = \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (11)$$

である。終端速度とは

$$v_t = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \quad (12)$$

で定義される収束速度である。計算すると $v_t = g/\gamma$ であることがわかる。現代の古典力学で定義される終端速度は、自由落下開始から長時間が経過し、重力と「空気抵抗」が釣り合って加速度が0となる状況（つまり等速度に収束）で発生するものとして与えられる。

ガリレオが考えた「終端速度」は、空気抵抗と重力の釣り合いではなく、自然的運動と強制的運動の整合性を考慮した結果登場した、「インピタス (impetus)」と名付けられた（(想像上の)物理量)によって説明される。インピタスとは、「投げ上げられた物体」の問題において、手を離れた後の物体の上昇運動を維持するためのものとして、14世紀ごろ Jean Buridan によって導入された。熱を表す「粒子」として導入された、仮想の「フロギストン」によく似た概念である。当初は、強制的運動を発生させているもの（手や機械など）から、強制的運動の最中に運動物体に「注入され、籠められる」もの（英語では impress で表現される）とされ、強制的運動の範疇に分類された。後に、自然的運動が引き起こす「速さ」によってもインピタスは籠められることができると拡張解釈されたりもしたが、次第に矛盾を引き起こすことがわかり支持を失っていく。もちろん、その決定打となったのはガリレオからニュートンにかけて進展した「古典力学」の完成であるが、

¹⁰ 実は似たような法則をすでにオックスフォード大学の宗教哲学関連のグループがみついていたという事実もあるようだが、その適用対象が「慈悲心の加速増加」（宗教への数理の応用）であったため、物理学としては認められていないだけのようなのである。

「対話」を書いていたときガリレオは落体の法則も慣性の法則も知らなかった。ガリレオはかなり長い期間インピタス理論に「かぶれていた」ことが明らかになっている。

手によって投げ上げられた物体の運動状態の変遷をインピタスを用いて説明してみると次のようになる（もちろんこれは現代科学の観点からは全くのデタラメである）。まず、物体が直接手に接しながら上方に押し上げられている最中の運動は強制的運動である。掌を離れる瞬間に物体が到達した速さに応じて物体にインピタスが注入される。掌を離れる瞬間に物体がもつ「運動推進要素」は、インピタス（上方への推進）と重さ（下方への推進）の2種類であり、物体は両者の混合状態になっている。このとき、初速が大きければ前者の「量」が後者の「量」を上回るため、掌から離れた後も上方への「強制的な運動」が継続し、地球の中心から離れる方向に物体は運動し続ける。インピタスは空気抵抗などによって散逸し（その機構の詳細を考えても無駄なので敢えてここでは考えることはしない）、次第に推進要素の割合はインピタスと重さが同率に近づいていく。そして両者が等量となったとき、「物体は空中で静止」する。（この静止は「瞬間」であると考えるのが自然であるが、ガリレオは「静止は釣り合い以外にはありえない」と考え、空中での転回点の「静止」は厳密には静止ではないとした誤った結論を下している。）静止の瞬間が転回点である。この後、物体の運動は降下に転ずる。インピタスは減少し続け、重さによる自然的運動（下方への自然的運動）が次第に優勢になる。インピタスが完全に消滅するまでの過程で、物体は加速度運動を行うとみなす。最終的にはインピタスが完全に消滅し、物体の「推進要素」としては重さだけが残る。この状態になるとそれ以降、物体の落下速度は変化せず「一定値」を保ち続ける。これがガリレオが想定した「終端速度」である。こうして、手で投げ上げられた物体は、最終的には、等速で落下する自然的運動になるというが、ここに至るまでにはかなりの長い距離が必要とされ、通常の実験や観測ではなかなかお目にかかれないのだという。この説明を知った時、どうしてガリレオがわざわざ斜塔を実験の場所に選んだのか少しわかった気がした。

斜塔から大きさの異なる2つの物体を自由落下させた「実験」というのは長年その信憑性が議論されてきたが、S.Drakeによると、この逸話はビビアーニ（ガリレオの最後の弟子）が晩年に書き残した「師ガリレオの回想」に記述されていることで、幾分不正確なところがあることは否定できないものの、ガリレオがピサ大学で教鞭を取っていた頃にそのようなイベントがあったことはまず間違いないという。Drakeは、実験というよりもデモンストレーションだったはず、という分析を行っており、ガリレオがすでに考察を終えて自信をもっていた落体の理論を、よりインパクトのある形で多くの人にアピールした場だったことが推測される。ガリレオの野心的な性格を考えれば、ピサの斜塔を用いた「実演」の必要性は、「でんじ●う」氏のようなサイエンスコミュニケーターが好みそうな、派手な演出ということになる。このあたりのガリレオの性格については以前の論文でもすこし取り上げた。

しかし、今回の研究でガリレオの終端速度の考えを知り、ピサの斜塔を利用したのはもう一つ理

由があったらしいことがわかってきた。つまり、落下速度が収束値に至るまでにかかなり長い距離が必要と考えたインピタス理論の存在である。このデモンストレーションにおいて、まずは落体の材質と落下中の媒質が同じという条件が大事であることが指摘できる。ピサの斜塔の逸話が伝聞化し、後年その内容が変質するにつれて、「鉄球と木球が同じ速度になった」などといったバージョンが出てきたようだが¹¹、これは当時のガリレオが到達していた理解を超えてしまっている。ピサ大学で最初のポジションを得たばかりの頃のガリレオは、ベネディッティの理論の受け売りに近い水準に止まっていたので、現代の運動方程式が示す「ユニバーサリティ」には気づいていなかった。したがって、空気抵抗の邪魔があることを忘れたとしても、材質が異なる場合は、質量や体積がどんな比になろうと、2つの物体が同じ速度で落下するなどは考えていなかったはずである。ガリレオが信じていたのは、あくまで材質が同じ、つまり specific gravity が共通のものであれば、大きさの違い（質量が異なるということ）場合でも2つの物体の落下速度の収束値が一致するということであった（注意：これは同時着地を意味していない）。実際、「対話」の2つ目の疑問では、十分高い場所から落下させれば、木球よりも鉄球の方が最終的には速度が大きくなって「追い抜く」と記述している。浮力の原理の観点から、鉄の「終端速度」の方が木のそれよりも大きな値をとると考えていたからである。

¹¹ 東京大学の総長が平成19年の入学式で話した内容がその例の一つである [10]。



FIG. 1: ピサの斜塔。根元部分を見るとどのくらい傾いているかよくわかる。[画像データ出典：ピサにて筆者撮影]

したがって落下実験を行う塔の高さは重要である。落体の実験をするだけなら、なにも斜塔を利用せずとも、机の上にさらに椅子を乗せてそこから落としてもよいだろうし、2階のベランダから落としてもいいだろう。つまり、それほど高い場所から落とさなくても、ある程度の高さが確保できれば実験は可能ではないかと思うのである。実際に、実験室で2-3mの高さの台の上から大きさの異なる犬用ボール（テニスボールに類似した材質）を落とす実験を行なって見たが、着地の同時性を確かめるのは案外簡単にできる。しかし、落下速度を測定するとなると話は別である。これはなかなか難しいものである。また、専修大学9号館の吹き抜けを使って、8階から1階までの落下実験を行なった際には、着地寸前の速度が非常に大きくなってしまって、着地の同時性ですら肉眼での確認が難しくなった。結局は、iPhoneのビデオ機能に頼る状況となったことを白状しておく（それでも画像がぶれて判断は難しかった）¹²。したがって、着地の同時性を確かめるなら、むしろ最終的な速度がそれほど大きくなる方がやりやすいのではないかというのが実感である。

ピサの斜塔の一番上に立つと、それはかなりの高所感である (FIG.2)。登ってみればわかるが、その頂上からはピサからトスカーナにかけての広大な平原が地平線の彼方まで広がるのが確認で

¹² ちなみに、大学の吹き抜けを使った実験では、結構な数の聴衆が知らないうちに集まってきた。こういうタイプのイベントは人々の興味を掻き立てるようであり、ガリレオの最初の目論見の意味も再確認することができたのは収穫であった。

き、白い雲がものすごい勢いで目の前の空を動いていくような気がした¹³。個人的には、あの場所から2つのテニスボールを持って落下させることすら困難であると感じた。ましてや重たいダンベルを落とせと言われても、一つ落とすだけでも精一杯なのに、大きさの異なるダンベル2つを同時に手離すことに気を配りながら実施すると考えただけでも気絶しそうである。



FIG. 2: 斜塔の頂上から見たピサ大学のキャンパス内の眺め。縁に立って、重たい鉄球を2つも落とすのはとてもじゃないが無理である。画像左下に人間が二人立っているのがわかる。[画像データ出典：ピサにて筆者撮影]

ガリレオがわざわざこのような高い塔を利用して落下のデモンストレーションを行なったのは、「終端速度」が念頭にあったのは一理あると思うがどうだろうか。中途半端な高さでは、加速度運動の段階が終了せず、ガリレオがもっとも運動学で重要と考えた、物体固有の specific gravity (密度) による自然的運動の落下収束速度に到達しないことを恐れたのではないだろうか?ピサの斜塔のデモンストレーションについて記述を残した弟子ビビアーニは「デモンストレーションは何度も繰り返された」と書いているが、やはり「速度が同じになった」ことを肉眼で判定するのは相当難しかったのではないだろうか?ただ、ガリレオの考えとは無関係に、実験をやれば2つの物体はほぼ同時に着地するはずであるから、それを見た素人の群衆は「ガリレオの言っていることは合っている」と早合点してしまった可能性は捨てきれないと思う。

¹³ 宮崎駿の作品の中に、捕らえられた少女が「三角塔」という高い塔の頂上の縁から水平に伸びた板の上に立たされるといふ拷問のシーンがある。あの時に登場した風景がまさにピサの斜塔のてっぺんから見えた風景であった。

5.5 残りの2つの問題

残りの2つ問題は砲弾の軌道に関する「初歩的」な疑問で、ガリレオの友人から寄せられたものだという。ガリレオは「対話」ではこの問題に対する答えを与えず、未完のままとなっている。この問題に答えたのは *De Motu* においてであるが、それは正しい理解には到達していない。「正しい理解」とは放物軌道であるが、これはガリレオによって後年与えられることになる。最後の2つの疑問は、放物軌道ということさえわかっただけでは取るに足らないものであり、ここで考察するのは省くことにする。

6. "De Motu (Antiquiora)"

今回の論文のメインテーマの一つが、*De Motu* の中に記された、初期のアイデアの内容の確認である。S. Drake の著作 [4] にも概要が載っているが、I.E. Drabkin による英訳 "On Motion" [5]、およびその本に掲載されている Drabkin の解説が非常にわかりやすい。現代の科学者が忘れてしまった Antiquity 時代の自然哲学の常識の解説が含まれており、難解な部分を効率よく理解できる。

まずは *De Motu* の概要についてまとめておこう。ガリレオの未発表の作品であり、1890年にガリレオ著作集 (E. Alberi 編集) として出版されるまでは手稿として存在するのみであった。手稿は現在もフィレンツェの国立図書館に保管されている。ビビアーニらガリレオの弟子たちは後に "De Motu Antiquiora" という題名だったと主張したが、その部分を記録したガリレオのノートは残っていない。M. Camerota と M. Helbing の最近の論文 [6] によると、これは「運動に関する古い文章」といった意味だということ。おそらくガリレオ自身が、後年自分の原稿を読み返した際に付したメモ書きのようなものだったと思われる。1890年に A. Favaro がガリレオの著作集を出版した際には、Favaro の判断で "De Motu" (運動について) という、より一般的な題名が冠せられた。現代の科学史家も単に "De Motu" と書くことが多い。

De Motu は全23章からなり、一応原稿は完成しているが出版はしなかった。その理由は諸説ある。以下では、順を追って *De Motu* で議論されている内容を見てみることにする。

6.1 De Motu の第1-3章：重さ、密度、そして浮力におけるその相対性

アリストテレスの自然的運動の概略が整理され、「自然的位置」について説明があり、「自然的運動」の観点から「重さ」と「軽さ」についての解説がある。これについてはすでに「対話」のところで考察したので省略する。

一つ注目したいのは、第1章でくどくどと議論されているように見える、重さと密度の区別についての議論である。ガリレオは「鉛と木のどちらが重いか？」という疑問を投げかける。普通の人は鉛と答えるだろうが、10キログラムの鉛と10キログラムの木片を比べた時でも、「鉛の方が重い」と答えるべきなのだろうか？もちろん答えは「同じ重さだ」である。ガリレオが念頭に置い

ていたのは、アリストテレスの落体法則などで考察される「重さ」のことであり、それは specific gravity、つまり密度のことであった。若き日のガリレオは、落体の速度が「終端速度」に収束すると考えており、それは物質固有の性質とみなしていた。つまり、10 キログラムの鉛の終端速度と10 キログラムの木片の終端速度は必ずしも一致している必要がない、というのが若き日のガリレオの考え方であった。密度はアルキメデスの浮力の原理で重要な役割を果たす。ガリレオは落体の法則を浮力の原理と同じ論点で理解しようとしていたので、De Motu の最初の章では「重さ」と「密度」についてくどくどと議論したのである。

ところで、アリストテレスの落体の法則については、その原文が古代ギリシア語であることから、現代の科学者の多くが翻訳（といってもラテン語に訳されても困るので、英訳ということになるのだが）を必要とする。しかし、その訳の多くが「意識」になっており、現代科学の言葉にあらかじめ書き換えられている場合が多々見られる。しかし、科学自体が成立していなかった Antiquity の時代においては、非科学的な内容が自然哲学の中に取り込まれていた。アリストテレスの物理にも、そういう記述は多々含まれる。

アリストテレスの落体の法則は、アリストテレスの物理の第4巻第8章 215a24 段落から記述が始まっている。その内容はかなり冗長で、多くの文献ではその要約を、さらに意識して「アリストテレスの落体の法則」としている。たとえば、wikipedia には

Aristotle proposed that the speed at which two identically shaped objects sink or fall is directly proportional to their weights and inversely proportional to the density of the medium through which they move.

とある。ここで着目したいのは、"density of the medium" という表現である。ルネサンス期のガリレオの De Motu ですら、くどくどと密度と重さの相違を議論しているのに、Antiquity 時代のアリストテレスが「密度」という概念を使って法則を記述したとは思えないのである。アリストテレスの落体の法則の引用において「密度」を使っている論文は他にも多く見つかる [8]。また、密度の代わりに「摩擦」とか「抵抗」とかそれに類似した言葉を利用しているものも見つかる。S. Drake の著作 [4] では、「抵抗 (resistance)」という言葉が採用されているが、続く但し書きで「"抵抗" といってもアリストテレスが意図した意味は、現代物理学における空気抵抗とか粘性といったものではない」と説明があり困惑する。一体、原著ではなんと書かれているのか非常に気になるところである。

しかし、古代ギリシア語は解読不可能なので、直近の英訳を見てみることにした。すると、有名なものとしてオックスフォード大学の Edward Hussey が 1983 年に英訳したものが見つかった [9]。215a24 段落から始まる本文 (の英訳) には、"resists the thing" という表現と "of thicker texture", "of finer texture" といった表現が使われていた。また、Hussey の解説 (ノート) には、意識され

た要旨が書かれていて"varies inversely as the resistance of the medium, i.e., as its thickness of texture"とあった。どうやら、「抵抗」を採用する学者たちは Hussey のノートの一部だけを引用して「inverse of the resistance」としているようである。しかし、resistance の後に、「i.e., as its thickness of texture」と続いていて、resistance の意味が現代と違うことをちゃんと説明しているのに、これを省略してしまっている人が結構多いことがわかった。この"thickness of texture"というのは、S. Drake によると「ワインのコク (body)」とか「ビールの喉越し」といった感じの「感覚的なもの」なのだそうである。すなわち、密度とか、抵抗とかとなんとなく関係がありそうな概念ではあるが、科学的にしっかりと定義されたものではなく、現代の用法をそのまま当てはめるのはあまり適切ではない、という説明であった。これを知って、ようやくアリストテレスの落体の法則の記述について得心した次第である。

アリストテレスは、物体が自然的位置の上下にあるかどうかで落下するか浮上するかが決まるとした。したがって、どちらの運動も「自然的運動」とみなした。ガリレオも De Motu の最初バージョンではアリストテレスの持論を受け入れたが、浮力の性質についての考察が深まるにつれ、浮力というのは重力（ガリレオは下向きの自然的運動と呼んでいた）の相対効果であることが判明し、より本質的なのは下向き自然的運動、つまり「重力」であることに気が付いた。De Motu の第二バージョンでは下向きだけが自然的運動であると書き直している。水には質量があるが、水の中にいると水の重さを感じないのはなぜか、という疑問や、頭の上に乗っている大気圏上層まで考えれば空気だって相当な重さがあるはずだが、それを感じないのはなぜかということと関係がある。アリストテレスの「軽さ」という概念は、負値の「重さ」という意味であるが、これは相対密度のようなものである。ガリレオは、「軽さ」は本質的な物理量ではなく相対量であることに気がつき、運動を支配するのは「重さ」であり、重さが決める下向きの運動（落下運動）だけが本質的に重要だと気が付いたのである。

6.2 De Motu の第 4-5 章：浮力に関する 2 つの証明

浮力の問題に関する証明が与えられている。4 章では重さ（正確には密度）が同じである物体と媒質とがあったとき、物体が感じる重力も浮力も 0 となること、5 章では木と水の関係のように、物体の密度が媒質の密度よりも小さいとき、完全に水没するのではなく少し上部が媒質面から浮き出ることに関することが証明されている。この 2 つの章の結論は重要である。あとで利用されるように、この 2 つの浮力の状態は、機械学における天秤の状況と対比される。

6.3 De Motu の第 6 章と第 9 章：天秤の運動と落下運動の類似について

第 6 章は（第 14 章に次いで）重要な章であり、S. Drake の著作 [4] でも特別な注意をもって考察が行われている。ここでガリレオは初めて、アルキメデスの機械学をアリストテレスの物理（動力学）に応用する試みを行なっているからである。具体的にいうと、自然哲学（アリストテレスの

物理)における浮力の法則と機械学における天秤の上下運動の類似性についての考察である。第9章も同様の内容である。第6章では「類似 (analogy)」と書いていて慎重な立場をとっているが、第9章では「帰着 (reduced)」と書いているので「等価」と言い切っているところが違う。

6章と9章で提示された、自然的運動と「天秤の重りの動き」の等価性は、14章で斜面上の物体の運動へ応用される。そこで、慣性の法則および落体の法則へとつながる考え方が提示されるから、ガリレオの物理学研究の集大成へ至る道が、まさに De Motu の6章と9章から始まったといえるだろう。そしてここでもアルキメデスのアプローチをアリストテレスの物理に適用するという方法論が採用されている。

しかし、落体の運動の考察といっても、De Motu の6章や9章で考察される運動は、依然として浮力と関係した内容である。加速度運動の分析や、放物軌道についての考察はまったく行われていない。若き日のガリレオが興味を抱いているのは、運動の向き（浮力か落下か）と、「終端速度」と「重さ」（現代の「密度」の意味として使用されている）の関係であって、まだまだ現代の古典力学に直接つながる内容には到達していない。

まずは、天秤の振り舞いのどこに、自然的運動と強制的運動が垣間見れるかみてみよう。天秤の両端に置かれた2つの重りの重さが異なり、釣り合いの関係が成り立たない場合、天秤の腕は重い方が下に、軽い方が上に動く。現代の古典物理の観点からは、この状況は剛体棒がもつ角運動量の時間変化が重力によって発生したトルクによって与えられる、という運動方程式に対応する。天秤の腕を細い直線で近似できる剛体だとする。この剛体の右端と左端には $m_R g \cos \theta$ と $m_L g \cos \theta$ という力が「下向き」にかかっている。ただし、剛体棒の水平から見た回転角を θ とした。最初天秤の腕が水平になっているとする。 $m_R > m_L$ だとすると、天秤は右側が下方に、左側が上方に動き、時計回りに回転し始める。角運動量の方程式は

$$\frac{dL}{dt} = (m_R - m_L)g \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (13)$$

となる。 ℓ は腕の長さである。剛体の慣性モーメントを I と表すと、 $L = I\dot{\theta}$ であるから、上の方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}(m_R - m_L)g\ell \cos \theta \quad (14)$$

となって、 θ を力学変数とする運動方程式として理解できる。

ガリレオが想定したのは $|\theta| \ll 1$ の状況、つまり水平からのズレが小さい場合であるから、 $\cos \theta$ をテイラー展開して線形近似を行えば、

$$I\ddot{\theta} \simeq \frac{1}{2}(m_R - m_L)g\ell t + \text{const.} \quad (15)$$

となる。天秤の腕の両端の回転速度 v は $v = (\ell/2)\dot{\theta}$ で与えられる。したがって、

$$v \simeq \frac{1}{4I} (m_R - m_L) g \ell^2 t + \text{const.} \quad (16)$$

$$= \frac{m_R - m_L}{\mu} g t + \text{const.} \quad (17)$$

となる。ここで慣性モーメントが

$$\mathcal{I} = \left(m_R + m_L + \frac{M}{3} \right) \frac{\ell^2}{4} \equiv \mu \frac{\ell^2}{4} \quad (18)$$

と書けることを利用した。ただし、 M は天秤の腕の質量である。ここで、 $m_R + m_L \gg M$ という仮定を置くと

$$v \simeq \frac{m_R - m_L}{m_R + m_L} g t + \text{const.} \quad (19)$$

となる。これは等加速度運動を表す式であり、因子の違いはあるが落体の法則とほぼ同じ形になっているのがわかる。まさにガリレオの狙い通り（というよりもそれ以上だが）、釣り合いからずれた天秤の腕の運動は、落体の法則によく似た運動をすることがわかる。もちろん、ガリレオはこのとき正確な落体の法則には到達していなかったから、上のような内容を期待したわけではない。しかしながら、実際に分析してみると天秤の動きは加速度運動に近似できるわけだから、ガリレオの直感あるいは観察眼が非常に鋭敏であったことが伺える。

ガリレオが De Motu で期待したのは、浮力を考える上で重要な物体の重さと媒質の重さの相対関係である。ガリレオはこのとき密度という用語を正しく使えていないように見えるが、「重さ」と書いているところを密度と読み替えてやると、ガリレオが落体の法則に適用しようとしていたのは、アルキメデスの浮力の原理

$$F = (\rho_B - \rho_M) V g \quad (20)$$

であることがわかる。 ρ_B は物体の密度、 ρ_M は媒質の密度、 V は物体の体積である。この物体は媒質中で有効重力 F を受けて運動する。「相対密度」すなわち物体と媒質の密度の差がガリレオが着目していた量である。天秤においても、右と左の質量の差、つまり「相対質量」が運動を決めるパラメータの一部になっている。ガリレオはこの2つの相対量に類似性を見たのであった。

天秤の右の重りも、左の重りも、単体で考えればただ単に重いので、両者とも自然的運動にしたがって、落下するだけである。しかし、両者を天秤にかけた途端、相対的に軽い方は自然的運動に逆らって「上昇」する。また相対的に重い方も、オリジナルの重さよりも「すこし軽くなった」感じで落下運動する。つまり、「見かけの運動」がたとえ上向きだったとしても、それは相対的な関係に起因する結果であって、本質的な運動、あるいは本来の物体の物理的な基本性質は、単体で考えた時の下向きの運動であるとガリレオは考えたのである。したがって、上向きの浮力は「派生

的」な運動であるから、物理の本質としては考慮する必要がない、ということになる（もちろん、応用としては重要なテーマである）。そして、下向きの自然的運動（つまり落下運動）だけが基本的なものであり、その様相を決定するのが「重さ」（ガリレオはこのとき「密度」という意味で重さをつかっていた）である。

面白いのは、第6章で登場する水面の上昇の議論である。物体を水中に水没させると、物体の体積の分だけ水面が上昇する（まさにアルキメデスの原理のオリジナルバージョンである）。このとき、水の塊の動きは地球の中心から逆方向であるから、自然的運動に逆らう奇妙な運動ということになる。しかし、これを天秤の運動に当てはめれば不思議なことではなく、相対的な関係によって天秤の右の重りが落下すると左の重りが上昇するように、水没した物体が落下すればその代わりに媒質が上昇するのは「当然」とすら言えるのである。

6.4 De Motu の第7章と第8章：速度について

さて、ガリレオの表現には「運動」という言葉があちこちで登場する。困惑するのは、「速度と運動を切り離して考えるのは難しい」といった表現である。現代の古典力学の観点から、この主張は当たり前すぎて、「どうやったら切り離して考えられるのか」と逆に難しい問題になりかねない。よくよく読み解いてみると、どうやらガリレオの言う「運動」とは、下向き（重力）か上向き（浮力）かという分類を指しているようである。楕円軌道や放物軌道など2次元、3次元の複雑な軌道がまだ力学の中に登場していないので、運動は1次元であり、その正負の符号だけを考えればよかったのである。一方、速度は文字通りの定量的な物理量であった、ガリレオの言う「運動」は定性的な考察、「速度」は定量的な考察に対応していると読み取れば、少しだけわかりやすくなる。しかし、すでに議論したように、解析学の基礎が完成していなかった当時、連続関数の扱いやその微分積分を考えることは困難であった。そこで、ガリレオが目にしたのは「終端速度」、つまり等速に移行した後の物体の運動である（しかし、この考え方は上述したように現代の古典力学の観点からは誤りである）。

ガリレオは、物質の種類によって終端速度は一定であると考えていた。つまり、密度が同じ物体の落下速度は共通の値に収束すると考えていた。これは逆に、物質が異なれば（密度が異なれば）、「終端速度」は異なるという意味でもあった。驚くべきことに、ガリレオは落下の法則のユニバーサリティをこの段階では否定していたのである¹⁴。De Motu を読むと、ガリレオは「同じ媒質中で2つの物体が異なる速度（おそらく終端速度を意味する）になるとき、それは材質の違い（密度の違い）のせいだ」と考えていたように見える。

¹⁴ "Two New Sciences"で最終的に肯定したかどうかは現在調査中である。"Two New Sciences"は対話形式で書かれているので、原文を解釈し意味を整理するのが非常に厄介である、というのが言い訳である。

浮力の原理で考えれば、この主張に騙されそうになるのは確かである。物体1と物体2が共通の媒質中で落下運動する時、その運動を決める相対密度は $\rho_1 - \rho_M$ と $\rho_2 - \rho_M$ である。もし $\rho_1 \neq \rho_2$ であれば、浮力の大きさが物体によって異なるので、その終端速度は異なるだろう、とガリレオは考えたと思われる。一方、同じ材質の場合には、物体1と物体2の「重さ」が（つまり質量）が異なっても、密度が共通であるならば、運動自体は相対密度 $\rho_1 - \rho_M = \rho_2 - \rho_M$ で決まるので、この場合には体積の異なる2つの物体だとしても同じ速度になるという訳である。

しかし、この議論で根本的に欠けている視点が「慣性の法則」である。重いものは動きにくいのである。それは運動方程式の左辺に現れる運動量の時間変化の項に含まれる。ガリレオが考えたのは浮力、つまり力の部分だけの考察であり、ある意味、重力の法則だけである。慣性と重力と両方の法則を同時に考察することで、（慣性質量と重力質量の間の相殺という形で）ユニバーサリティは生じるのである。

6.5 De Motu の第 10-13 章：密度および相対密度

ここでも密度、および相対密度のことが議論される。アリストテレスは「自然は真空を嫌う」と言ったそうだが、ガリレオは真空中 (in void) でも自由落下（つまり自然的運動）は可能であると主張した。これは後年、落体の法則で空気抵抗の効果を議論するときの重要な布石になっていると推測される。また、天秤における軽い方の重りの「浮上」に見られるように、浮力による自然的運動も、自由落下する「重たい物質」と自由落下が起きる媒質の密度間の相対関係から生まれる運動とみなすべきだ、といった議論を展開している。その具体例として、空気中の空気が「重さ」を持っていないように思える理由について議論したりしている。これらの内容は、すでに「対話」のところでも議論したので省略する。

6.6 De Motu の第 14 章：斜面上の運動と天秤の運動の類似性

この章が De Motu において最も重要な内容になっていると、多くの研究者が認めるはずである。斜面上の運動自体がガリレオの力学研究の中心的題材である。ガリレオが落体の法則を実験的に研究するにあたり、ルネサンスの技術水準ではなかなか精密には測定できなかった落下物体の速度であったが、斜面を滑り落ちる物体の速度に転換することで、その大きさを低下させ、より制御しやすい形で測定を進めることができた、というのは有名な話である。また、天秤というアルキメデスの機械学で扱われた内容をアリストテレスの物理が扱う落体の自然的運動に応用している方法論も、ガリレオ独自のやり方である。

しかし、これらの点を差し置いて、この章の重要性がもっとも際立つのは、斜面の角度を変えることにより、この問題を慣性の法則で扱う水平運動の物理にすることもできれば、垂直に落下する物体の落体法則の研究にもすることができるという点である。つまり、ガリレオの物理学におけるすべての研究内容が、この斜面上の運動によって包括されるのである。

ガリレオが残した手稿には、この章を記した部分に、斜面とそこに接する円の図形が描かれている。これは前の論文の FIG.3 に掲載し [3]、斜面と天秤がどのような関係を持つとガリレオが考えたか説明を与えた。この論文では Drabkin による De Motu の翻訳版に載せられた等価な図を引用する（その方がガリレオの手描の図よりもわかりやすい）。下の FIG.3 がそれである。

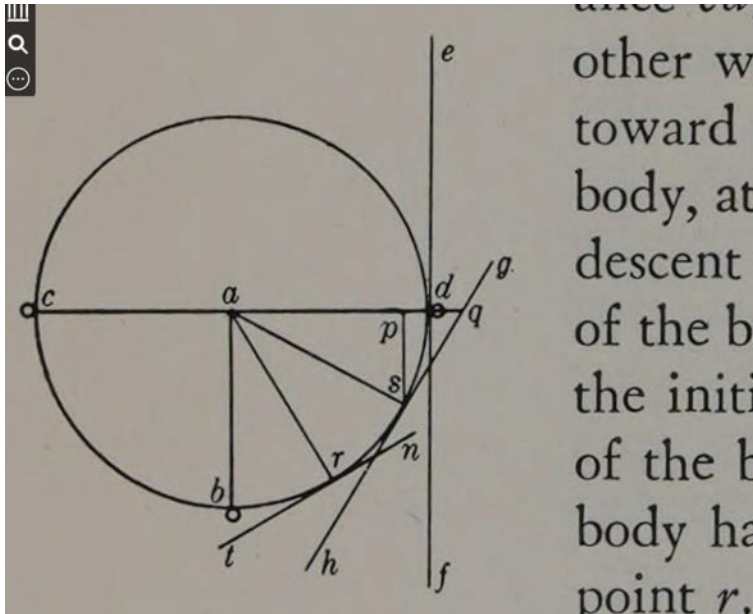


FIG. 3: De Motu の翻訳版 [5] に載せられた斜面と天秤を表す図。archive.org の web 公開版より転写。

FIG.3 に描かれた円の直径を表す線分 cd は、ガリレオが想像した天秤の腕に相当する。直径の線分の片端は垂直の斜面 ef を表す直線に接し、そこには物体が位置していると考え。この物体は天秤の腕の端に吊るされた重りのひとつとみなす。線分のもう片方の端 c には仮想的な重りが吊るされていると考える。この仮想的な重りの重さは物体の重さと等しいとし、仮想天秤は釣り合っているとす。実際に考えたいのは落下に要する「力」である（ガリレオの頭では「自然的運動を引き起こす効果」と表現されていたと思うが）。熱力学でよく利用される準静的過程に近い考え方がこの議論に適用されている。また、天秤の運動は剛体の回転運動と見なされるが、落下運動は 1 次元の直線運動である。ガリレオは微小時間（微小回転）の近似を用いて、回転の接線方向の運動が落下運動に相当すると考えた。これは上で考察した $\theta \ll 1$ のテイラー展開と同じであり、微分の考え方が少しガリレオの頭の中にあったことを示唆する。ひとつ注意すべき点は、第 6 章や 9 章で議論されたガリレオのオリジナルのアイデアでは、 c に置かれた仮想的な重りは自由的運動における媒質の効果に相当するものとみなされたが、ここでは端 c に置かれた重りが「垂直落下」を表すものとして利用される（ c と d は釣り合っているため、その効果が等価であると考えられるのである）。

次に斜面 gh の場合はどう考えたかという、天秤の腕は折れ曲がって cas となる。仮想的な重りは引き続き c に置かれ、最初の水平な位置での釣り合いと同じ重さを持つとする。このとき、斜面上の点 s に置かれた物体の重さをどの程度にすれば釣り合いが保たれるか考える。仮に同じ重さで済むのであれば、斜面 gh の上でも垂直落下と同じ速度で滑り落ちていくはずである。しかし、実際には斜面上の運動の方が速度は遅くなる（摩擦の効果を無視しても）。ガリレオが説明した内容は、現代の古典力学の言葉を使うと次のようになる。

折れ曲がった2つの棒が角度 $\theta + \pi/2$ をなして接合され剛体を形成している。 θ は斜面 gh の角度（水平面からの角度）を表すので $0 < \theta < \pi/2$ とする。この剛体にかかるトルク N を計算すると

$$N = -m_c gr + m_s g \sin \theta r = m_c gr \left(\frac{m_s \sin \theta}{m_c} - 1 \right) \quad (21)$$

となる。 r は半径を表す。トルクは、物体が斜面に沿って滑り落ちる方向を正とした。もし $m_s = m_c$ だとすると、トルクの符号は $\sin \theta - 1$ によって決まるが、これは常に負値をとる。つまり物体は斜面を駆け上がってしまい滑り落ちない。斜面を滑り落ちる速度も重さで決まるのであれば、垂直落下運動と同じ速度になるためには $m_s > m_c$ にしなくてはならないことがわかる。すなわち、斜面に置かれた物体の重さが m_c と同じ場合、斜面に沿う方向の「有効的重さ」が小さく、速度が垂直落下に比べて遅いことを意味している。この論理は現代の古典力学の観点からはデタラメであるが、これがガリレオが考えた理屈に近い論理である。

ガリレオはここで極端なケース、すなわち斜面が水平な場合について考察を加えている。まずは現代的な手法で考察してみよう。完全に水平だとすると $\theta = 0$ であるから $N = -m_c gr < 0$ となり、仮想的な天秤は反時計回りに回るという結果になる。しかし、これでは物理的によくわからないので、あくまで斜面の問題として考えることにする。そのために $\theta \ll 1$ の状況を考える。つまり水平に限りなく近い左下がりの斜面を考えるのである。トルクの符号を決める因子はテイラー展開の1次近似で

$$\frac{m_s \theta}{m_c} - 1 \quad (22)$$

となる。物体が斜面を「下る」ことを要求するならば、この因子が正値を取る必要がある。その条件を書き直すと

$$\frac{m_c}{m_s} < \theta \ll 1 \quad (23)$$

となる。つまり $m_s \gg m_c$ でないと、斜面上の運動は垂直落下と同じ速さにならないのである。重さが速さに比例すると考えるならば、わずかに傾いた斜面の上を滑り落ちる速さが垂直落下速度と同じになるためには、斜面の上の物体は相当重くないといけないう意味である。しかし、この結果を読み替えると、水平に近い緩い斜面では物体を運動させることは簡単で、「有効的重さ」

が相当に軽くても物体は「下り降りる」つまり動いてしまう。もちろん、この時の速度はかなり小さい。

斜面上の物体の重さ m_g が相当大きくないと落下運動と等価になれないということは、中途半端に m_g が大きい値を持ったとしても、小さな m_c に簡単に「打ち負かされて」動いてしまうということも意味する。こうして、水平方向の運動には「力がほとんど必要ない」という結論が導かれる。

動いていけば「運動」であるという考えは、現代の古典力学が完成する前の認識である。現代の古典力学では、等速直線運動する質点、つまり水平方向に慣性で移動している物体は「運動している」とは認識しないのである。もちろん、ある慣性系からみれば動いていると認識することはできる。しかし、別の慣性系から見ると静止していると認識することも可能である。「運動」という点において、慣性系の選び方が人間の認識に影響を与えている。この理由はニュートンの運動方程式がガリレオ対称性を持っているからである。これは「絶対静止系が存在しない」とか、「全ての慣性系は等価である」と表現されることもある。つまり、止まっているのは観測者の方で動いているのは物体なのか、それとも物体は静止していて観測者が動いているから物体があたかも動いているように見えるのか、この初等的な疑問こそがガリレオ対称性（またはガリレオ相対性）と呼ばれるものによって答えられるべきものなのである。したがって、等速直線運動している物体は、ガリレイ変換をすれば「静止している」状況と力学的に等価なのである。静止状態は「運動している」とは言えないだろうし、少なくとも「問題として興味のある運動ではない」ということになるだろう（自明な運動といってもいいだろう）。したがって、現代の古典力学では「運動」あるいは「非自明な運動」というのは、ガリレオが発見した（ほとんど重りの効果に頼らずに）「水平方向に運動する」運動以外の運動を意味するのである。ガリレオが（後に）発見する「慣性の法則」にしたがって「移動する」物体の運動は、「運動」とはみなさない、あるいは興味のある運動とはみなさないのが現代の物理なのである。

斜面を下り降りる運動は、物体が地球の中心へと近づく「自然的運動」と言えるだろう。一方、斜面を登る運動は、外部の力を借りずには実現しないから「強制的運動」と言えるだろう。しかし、水平面を運動する場合、その運動は地球の中心には近づかないから自然的ではない。かといって外部の力に頼らなくても運動してしまうので強制的でもない¹⁵。アリストテレスはこの宇宙の全ての運動は自然的か強制的かの二者択一であると述べたが、ガリレオはこの章の考察を通し、どちらの運動にも属さない「中性的運動」が存在する可能性を発見したのである。中性的運動は、慣性の法則の発見へと繋がっていくための重要なステップになっている。

¹⁵ 面白いことに、ガリレオは水平面は地球と一点で接するのみであるから、水平面の上を運動する物体は、地球の曲率を考慮すると、地球の中心から遠ざかる方向に運動することになる、と指摘している。だとすると、これは強制運動ということになるが、物体を動かすのに必要な力が無限に小さいわけだから、そもそも強制的とも呼べないことになる。つまり中性的運動を認めない限り、矛盾が発生すると主張していた。

6.7 De Motu の第 15,16 章：回転運動は自然的かそれとも強制的か

第 16 章で回転運動は自然的かそれとも強制的かという議論が与えられる。控えめに言えば、第 15 章はその議論を始めるための序章に相当していると言えるかもしれない。S. Drake は「アリストテレスの主張を否定」と解説している。しかし、実際に本文を読んでも、それはガリレオによるアリストテレスへの「誹謗中傷」に近い内容のことが書かれている。正直かなりひどいことが書かれていて、以前アリストテレスの業績を過小評価しすぎていた筆者ですら「これはやりすぎ」と感じたほどである。その一方で、第 14 章の後半には「超人であるアルキメデス」という記述がある。自然哲学者としての屋台骨を形成してくれたアルキメデスのことを良く書きたいという気持ちと、そのライバルであるアリストテレスをこき下ろしたい気持ちはよくわかる。筆者も、個人的にアルキメデスが抜きん出ているのは確かだと感じる。それにしても、foolishness とか ignorant といった言葉を学術論文に使うのはよくないと感じる。

さて、それほどまでにガリレオがアリストテレスをこき下ろした内容はなんであったのかというと、曲線と直線の比較である。本文中には「円と直線の比が決まらない」などといった表現が使われているが、正直、現代科学の観点からは最初なんのことを言っているのかさっぱりわからなかった。ガリレオの記述を読んでいくと、要は「円（曲線）の長さで直線の長さを比較することはできない」というのがアリストテレスの主張であるらしいことがわかった。これは確かにガリレオの言う通り、誤った理解である。とはいえ、微分積分が確立する前の時代であるから、こういう誤解は仕方のないことであろう。むしろ、このような誤解を乗り越える形で微分積分学が誕生したといえるかもしれない。

微分積分学が完成した現代の観点からは「曲線は直線と同じである」と主張できる。より正確に言えば、「曲線とは無限小の直線¹⁶の寄せ集めである」となる。「無限小の直線」というのが微分であり、「寄せ集め」というのが積分である。例えば、円周長の計算は次のように直線の和として表すことができる。まず微小な角度 $\delta\theta = 2\pi/N$ を定義する。最終的には $N \rightarrow \infty$ とするのだが、まずは有限の N で止めておいて、幾何学的な計算を先に行う。 $\delta\theta$ は、円を N 多角形で近似した時、隣接する頂点 2 つと円の中心の三点がなす三角形の「中心角」である。余弦定理を使うと N 多角形の辺の長さ dl (短い線分の長さ) は

$$dl^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \delta\theta = 4r^2 \sin^2 \frac{\delta\theta}{2} \quad (24)$$

で与えられる。 $\delta\theta \ll 1$ を利用してテイラー展開の線形項までを残すと、

$$dl = 2r \sin \frac{\delta\theta}{2} \simeq r\delta\theta \quad (25)$$

¹⁶ より正確には線分というべきかもしれない。

と近似できる。したがって、円周 L は

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N dl_i = \oint r d\theta = 2\pi r \quad (26)$$

と表せる(ただし dl_i はすべて dl に等しいとする)。こうして(アリストテレスには申し訳ないが)「(短い)直線の寄せ集め」によって円(曲線)の周長が計算できることがわかる。

16章は冷静な自然哲学的な内容に戻っていて安心する。それだけでなく、14章で気づいた「中性的運動」のもう一つの例として回転運動があるという重要な指摘が展開される。ガリレオの議論は非常に細かい。天球が一様な場合と天球が非一様な場合についてや、非一様な場合の重心が宇宙の中心(つまり地球の中心)と一致しているものの、球の幾何学的な中心が重心とずれている場合など、何通りも場合分けが行われる。そしてそのどの場合も、回転運動は「自然的でもなく、強制的でもない。つまり中性的である」という結論が下される。議論の詳細は、現代の科学の観点からはあまり興味のあるものではない(なにしろ地球中心説なので)。したがって、ガリレオの論理で一番わかりやすい場合だけをここでは取り上げることにする。それは、天球が一様な質量分布を持っており、その重心が幾何学的な中心と一致している場合で、かつ重心が宇宙(つまり地球)の中心に置かれている場合である。天球の上の一点を考えると、この点は宇宙の周りを一定の距離(回転半径)を維持しながら回るので、宇宙の中心に接近することもなければ、遠ざかることもない。自然的運動は宇宙中心に接近する運動として定義され、強制的運動は逆に遠ざかる運動として定義された。したがって、回転運動は自然的でもないし、強制的でもないということになり、結論は「中性的運動」ということになるのである。

14章で最初に気づいた中性的運動は「水平面上の運動」であった。この運動は、ガリレオの「天秤モデル」に基づけば、天秤の腕の回転運動の水平接線に対応していた。したがって、16章で考えた「回転運動」は、天秤の回転運動を通じて考えた水平運動と「共通点がある」と言えるのである。この指摘は、ガリレオ自身の筆によるものではなく、翻訳者(Drabkin)の解説に書かれている。

このように、ガリレオは次第に「中性的運動」のアイデアに自信を深めていく。アリストテレスへの反駁はますます強固になり、そして「新しい力学」が中性的運動から始まるという感触を得たのではないかと思われる。つまり、のちに慣性の法則と呼ばれる法則を中心にガリレオが力学の問題を考えるようになる素地が固まり始めたといえよう。

S.Drake は、ガリレオが地球中心説を(De Motu 執筆中は)信じていたことに着目している。実は、1597年にガリレオはケプラーに最初の手紙を書いた[2]。そこでガリレオは「コペルニクスの説を若い頃より信じていたが、このことは世間には内緒にしておいて」と書いた。これに驚いたケプラーはすぐに返信をしたため「すぐにでも勇気を持って自分の信念を公表したらどうか」とお節介を焼き、ガリレオはこの返信を無視した(次の手紙は13年後になり、それが最後となった)。De Motu が書かれたのが1591-92頃だということから、最初の手紙の5年ほど前のことである。「若い

頃より」というのはかなり鯖を読んだ表現であることが推測される。ガリレオがコペルニクスの説に傾いたのは、De Motuの後であるのは16章の内容から明らかであり、実はケプラーへの手紙を書いた「ほんのちょっと前」だったということになるだろう。

6.8 De Motuの第17-21章：インピタス理論と投げ上げた物体の運動

De Motuの後半で、インピタス理論がついに現れる。中性的運動の存在に気が付いたわりには、まだその整理がよくついていなかったことがわかる。慣性の法則に気づけば、物理的実態が不明なインピタスが不要であるのは明らかだからだ。

この部分で議論されるのは、「対話」の中で考えた中心的な内容、すなわち「手で投げ上げた物体の運動」の問題である（当時の最大の難問）。インピタスの散逸、それによる空中静止と「終端速度」などが議論される。ほぼ「対話」と同じ内容である。これらの議論についての（筆者による）考察は、すでに「対話」のところで行なったのでここでは繰り返さない。

6.9 第22章：鉄球と木球の自由落下の問題

鉄球と木球の問題も「対話」で取り上げた問題であり、この「間違った考え方」を「対話」から5年ほど経過した後もガリレオが持ち続けていたことがわかる。ここで繰り返し考察する必要はないだろう。

ただ、Drakeが着目し簡単に議論している内容に一つ面白い点があるので、ここではそれだけを取り上げてみたい。当時の最大の難題「投げ上げた物体の運動」については、インピタスの散逸のアイデアによって（それなりに）論理的な答を与えることはできた。しかし、初速0で静かに下向きに放たれた「自由落下運動」に関しては、手でインピタスを込めることができないため、「終端速度」に到達するというガリレオの主張はもちろん、（すくなくともガリレオのいうところの「初期の過程」で）なぜゆっくりと動き始め、しだいに加速するのか説明することができない。

転回点で「静止」することを認めるとして、そこから次第に加速するのはどうしてかインピタス理論での説明を簡単に復習してみよう。転回点ではインピタスの「効果」と重りによる自然的「効果」が「等量」となり、その後はインピタスの散逸が継続するが故に、重りの自然的効果の方が次第に優勢になって物体は加速すると考えたのであった。そしてインピタスが消滅した時に、自然的効果のみが残って「終端速度」に物体の速度は到達する。

ところが、手で投げ上げず、十分高い場所から静かに物体を自由落下させた場合は、最初からインピタスの効果は存在せず、重りによる自然的効果しかないはずである。そうなれば、最初から「終端速度」で物体は落下位するので加速運動をみせないことになってしまう。

この挑戦にガリレオは「垂直抗力」を持ち出して反論したのが、Drakeが「おもしろい」と感じたところである。高い場所で静止した状態で置かれている物体は、力の釣り合いのために静止して

いる。それは物体の重さ（現代の古典力学では重力に対応）と物体を支える「床のようなものからの垂直抗力」の間の釣り合いである。FIG.4に、ガリレオの原稿に残されたスケッチを載せた。

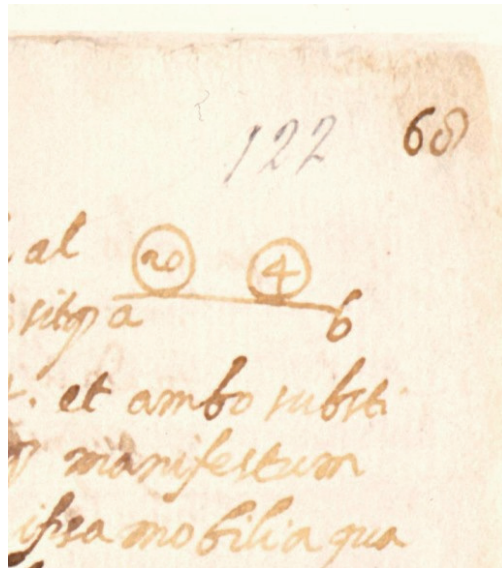


FIG. 4: De Motu の原稿に残された、「垂直抗力」に相当するアイデアを説明するための、ガリレオのスケッチ。線分 ab で表された水平面に重さが 20 の鉛玉と重さが 4 の木球が置かれている。フィレンツェ国立図書館に所蔵されている手稿 (Ms.Gal.71) を、ドイツのマックスプランク研究所の科学史部門が複写し、インターネットで公開しているものを転載したもの [11]。

Drake が指摘するように「垂直抗力」というのは、現代においても力学の初学者には非常に難しい概念である。重力やクーロン力の性質については、高校物理の教科書でも事細かに解説しているのに、垂直抗力の性質についてはほとんど記述がない。それは中心力なのだろうか？重力のように距離や質量といった物理量に依存する関数なのだろうか？こういった素朴な質問に、高校物理の教科書はまったく答えてくれない。というよりもそもそも答えられないのである。もし、垂直抗力を厳密に定式化しようと思ったら、アボガドロ数程度の原子分子の間に働くクーロン相互作用に関する超多体問題を解かねばならず、しかもその結果を簡単な数式で定式化するのは至難の技である（したがって、いまだにそのような「発見」はなされていない）。垂直抗力は、マクロな観点で力学を考えたときに、運動の拘束条件を便宜的に表現するためのもので、「止むを得ないもの」として考えるべきものである。垂直効力の性質は、力学における「最大の難問」といってもよいほど豊富な物理を抱えている概念であり、これを初学者がスッと理解するのはおそらく無理な話である。そこで、後年発展した解析力学に含まれるラグランジュ形式においては、拘束条件をあらゆる補助的な力は仕事をしないという仮定を課して、運動方程式に垂直抗力などの「よくわからない補助的

な力」が入り込まないようにしている。

ガリレオといえども「垂直抗力」を正しく使えなかったことは、この章の内容を読めばわかる。では、ガリレオはこの「垂直抗力」をどのように誤った使用法で使ったのであろうか？それは高い場所に置かれ、自由落下の準備段階にある物体は、重りによる「自然的効果」と、物体を乗せた机のような水平面による「垂直抗力的効果」が吊り合っていて静止している。この静止を可能にするために垂直抗力は外部から持ち込まれた効果であるのは明らかなので、これは「強制的効果」であると考えべきであろう。とすれば、初速度0で静かに自由落下する準備段階にある物体には、垂直抗力によってインピタスが微量ながら注入されていると考えるのが妥当であろう（とガリレオは考えた）。

しかし、インピタスの注入量は、物体の初速と関係しているから、初速0の場合は注入量も0ではないか、という反論が必ず出ることであろう。これに関しては、ガリレオは物体の運動を静止段階と運動段階に分けてしまい、運動段階でいきなり速度が発生すると考えた。この運動段階に入ったときは速度を持っているので、これが垂直抗力による強制的効果によるものとみなした。このようにしてインピタスが少しでも注入されるだろうと、苦しい説明をしたのである。もちろん、速度は時間に対して連続変化量であるから、静止モードと運動モードがいきなり（瞬時に）切り替わるはずはない。この辺りに、解析学の知識の欠如が再び見え隠れしているのである。

やはり、力学の基本は微分積分であると強く感じた次第である（高校物理は、中世の自然哲学のようにわざわざ難しいアプローチを選んでるように思える）。しかし、興味深いことに、ガリレオはDe Motuの原稿を完成させた後（約10年後）に、（解析学の知識なしに）正しい落体の法則を発見する。これは驚異的なことである。それがいかになされたかを分析する科学史研究はいまでも非常に活発であり、興味深い内容を含んでいる。この点に関しては別の機会に議論したいと思う。

7. 結論

ガリレオの「力学研究」の基礎を築いた初期の研究手稿2つについて今回は考察を行なった。一つが、就職浪人中に書かれ未完成のまま放置された「対話」と呼ばれる講義ノートであり、もう一つは最初のポストを得た後に執筆されたDe Motu (Antiquiora)と題された講義ノートである。こちらは「対話」で未完に終わった議論を最後まで考察しきったものである。しかし、De Motuもガリレオの生前に発表されることはなかった。

この2つのノートには、ガリレオが発見した2つの重要な力学法則である、慣性の法則と落体の法則に繋がる重要なアイデアが散りばめられている。人類が、アリストテレスの物理学のような、直感に頼った自然運動の解釈からどうやって脱却したのかを知る上で、ガリレオの初期の講義ノートは注目に値する。

「対話」と"De Motu"の双方で目立つのは、解析学が完成していない時代における、運動学（力

学) 研究の限界である。連続変化量をどのように扱うべきか、ガリレオですら四苦八苦しているのがよくわかる。

興味深いのは、人間はまったく誤った思考的脈絡から(観測や観察を介して)正しい本筋を見つけることができる能力をもっているということである。ガリレオの思考とその紆余曲折を通じ、幾分逆説的ではあるが、人間が持つこの素晴らしい能力について知ることができたのは科学論的には大きな発見だと思う。「物理学は数学と異なる」とよく主張される際の根本的な理由も、ここにあるのではないかと感じた。つまり、物理学の場合、間違っただ理論の出発点から始めても(観察や実験によって非自明な発想や思いつきなどが飛び出して)正しい答えに到達できるという冗談のような方法論である。これはケプラーが天体運動に関する3つの法則を見つけたときも似たようなことが起きている(計算ミスで2回繰り返した結果、間違い同士が相殺し、正しい結果にたどり着いた)。

ガリレオの場合は、力学の問題を、一見関係の無さそうな斜面上での運動問題(アリストテレスの物理学の範疇)と天秤の釣り合いの問題(アルキメデスの機械学の範疇)の類似性を利用してモデル化したところに、「非自明な思考方法」が見い出せる。まったく関係のない概念同士が、深いところで密接に関連しあっていて、それを発見すると大きな跳躍が得られるというのは、物理学の発展で度々見られてきたことである(例えば、フェルミ統計に従う電子などの素粒子の振る舞いを記述する相対論的量子力学の基本方程式「ディラック方程式」と、生成消滅演算子を線型結合によって混合し、新たに準粒子を定義することで超伝導の発生機構を記述する「BCS方程式」は、物理的にはまったく関連がないように見えるが、南部洋一郎の目にはディラック方程式の質量とBCS方程式のギャップエネルギーが同じものとして見えたのであった。そして、それらは自発的対称性の破れと回復という新しい物理概念によって深いところで関係していることがのちに判明したのである)。

De Motu までは、ガリレオの思考の中には Antiquity 時代や中世からの「置き土産」であるインピタス理論がまだ巣食っている。これを排除し、どうやって現代科学の最初の一步である慣性の法則、および落体の法則の完全な理解にたどり着いたのかが次の課題である。実は、この研究は De Motu を書き上げた 1592 年から天文学に移行する 1610 年までにガリレオが書き残した、日付の無い手書きの研究メモの整理という「難題」を克服して初めて実現できる。したがって、正しい理解や解釈に到達するのはなかなか難しいことが予想される。しかし、それが故に、いまだにガリレオの科学史は研究が世界中の科学史家によって精力的に続けられており、毎年たくさんの研究論文や書籍が発表されているのである。とはいえ、Drake らの努力によって相当な部分が明らかにされていることは確かである。これらをまとめ整理すれば、いままでに見えなかったガリレオの思考発展の経緯が明らかになる可能性を秘めているはずである。

参考文献

- [1] A. Einstein, "On the method of theoretical physics", *Phil. of Sci.* 1, 163-169 (1934, The University of Chicago Press).
- [2] 大井万紀人, 「楢田と慣性：(1) ガリレオとケプラーの交流と断絶」, 専修自然科学紀要第 52 号 (令和 3 年, 2021).
- [3] 大井万紀人, 「ガリレオの物理：(1) アルキメデスとアリストテレスからの影響」, 専修自然科学紀要第 53 号 (令和 4 年, 2022).
- [4] S. ドレイク, 「ガリレオの生涯 - 第 1 巻 (全 3 巻)」 (田中一郎訳, 共立出版, 1984); the original publication by Stillman Drake, "Galileo at work: the scientific biography"(University of Chicago Press, 1978).
- [5] G. Galilei, "De Motu Antiquiora" (ca.1590) and "Le Meccaniche" (ca.1600), English translations by I.E. Drabkin to "On Motion" and S. Drake to "On Mechanics" (University of Wisconsin Press, 1960).
- [6] M. Camerota and M. Helbing, "Galileo and Pisan Aristotelianism: Galileo's De Motu Antiquiora and the Quaestiones de Motu Elementorum of the Pisan Professors", *Early Science and Medicine*, Vol.5, No.4 (2000), pp.319-365.
- [7] 木材博物館, 「木材の比重リスト」 https://wood-museum.net/specific_gravity.php
- [8] 例えば, G. Heinemann, "Aristotle's Falling Bodies in Context: Remarks on Revelli", *Scientific Questions Then and Now* (Max-Planck Institute fur Wissenschaftsgeschichte, 2021).
- [9] Aristotle, "Aristotle Physics, Books III and IV", English translation by Edward Hussey (Oxford University Press, 1983).
- [10] 小宮山宏, 「平成 19 年度入学式(学部)総長式辞」, https://www.u-tokyo.ac.jp/ja/about/president/b_message19_02.html
- [11] Max-Planck Institute for History of Science, "Ms. Gal.71"(Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze), <https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECH0docuView?mode=texttool&url=/mpiwg/online/permanent/library/61DNE4D2>