Economic Bulletin of Senshu University
Vol. 57, No. 1, 1-26, 2022

疫病感染制御と最適人口*

中島　巖**

〈要約〉

生物分類学者たちは，自らをもランパー（lumper）とスプリッター（splitter）とに色分けし，分類を弄んで止まない。前者は，研究対象の標本間の類似点に着目，強調する姿勢をとるのに対し，後者は，相違点に着目，重視する。かかる言葉の起源は，19世紀半ばに遡るごとくである。

しかるに，標本間の極く極くわずかな差異も標本出現のあり様，したがって標本抽出のあり様によって，重要なそれと映ったり，あるいは圧倒的多数の類似点の中に埋没してしまったりする可能性は否定し得ない。換言すれば，かかる姿勢の差異が学者固有の資質によるよりむしろ当面の研究目的に基づくそれであると考えることができよう。新概念の導入を伴なう研究視野の拡充を企図するのであれば，スプリッターの姿勢が，より好都合なそれとなるかもしれない。

疫病感染研究においては，病原体の出現の逐次性が支配的であるため，極く極くわずかな染色体上の差も，圧倒的多数の類似性の中に埋没することなく新たな変異株として認識されるといった具合である。W. O. Kermack＝A. G. McKendrick による区画原モデルが逐次拡充されてきた事実は，その間の事情を物語る証しかもしれない。

以下では，スプリッター的姿勢の下に，ワクチン接種，加療を通じた感染制御のあり方をみた後，経済活動，生産活動の場からの退出による労働人口減を余儀なくする疫病感染を制御することにより最適労働人口が達成される過程をみる。

最適（労働）人口の概念は，最適経済成長の実現過程におけるそれに吸収されることを確認した上で，まず，疫病が存在しない局面において，人口成長率（および貯蓄率）を制御変数とする最適経済成長問題が解かれる。次いで，人口規模一定の局面と人口動態が考慮される局面において，それぞれ，加療率，ワクチン接種率を制御変数とする最適労働人口を含む最適経済成長が導く均衡体系のあり方が提示される。

JEL 区分：I11，I19
キーワード：感染制御，加療，ワクチン接種，最適人口

*　疫病感染拡散下における‘最適人口’は，‘最適労働人口’を指すものとする。
**　専修大学名誉教授

序

道は，遠く離れた地域間を人々が移動し，ヒトやモノが運ばれていく。

クリミア半島の南東岸に位置し，黒海にのぞむ港町フェオドシア(Feodocia)は，前７−前６世紀ギリシャの植民地として建設された。13世紀ジェノヴァ(Genova)領となりカッファ(Caffa)と改称され，15世紀トルコ領となって衰えるまで交易中心地として発展した。1783年ロシアに併合され要塞化，1802年に古名に因む現名に改称。

同地は，数奇な運命に弄ばれ続けていく。７世紀半ば中国隋によって東西二分化を強いられた突厥の西側の阿史那(中国表記)氏が建設したハザール(Xazáp)帝国の支配下に入る。同帝国の上層部はユダヤ教を受容し，９世紀には国教化する。やがて，黒海北岸に展開した遊牧民ペチェネグ(Печенéг)人による侵攻，さらに，キエフ大公国のスヴァトスラフ(Святослáв)の攻略を受け，10世紀に滅亡。四散した遺民たちのうちモンゴル・キプチャク汗国の追尾を逃れた者たちがアシュケナジー・ユダヤ人(Ashkenazim)として歴史に再登場した，とする有力な説がある。アカデミズムは認めたがらない。ドイツ，東欧，ロシア，そしてアメリカに移住したアシュケナジー・ユダヤ人が西突厥から発するチュルク(Тюрк)系となってしまうからである。

13世紀初めに中央アジアに発生し，まず，東方中国に伝播，そこから隊商，モンゴル遠征軍を介して西方，シリア，パレスチナ，果てはエジプトなどの北アフリカにまで伝播の波が及んだのがペスト(plague)であった。1347年，キリスト教世界で最初にペストの流行の餌食となったのが他ならぬカッファであった。中心となって交易を展開していたジェノヴァ商人が，感染したネズミと同船したままイスタンブール，ジェノヴァ，ヴェネチアと広く避難先を求めたことが，ヨーロッパ全土に波及する引き金となった。

14世紀当時，最も高い付加価値を期待し得る経済活動と言えば，交易であったであろう。モンゴル帝国が領地化した各所に設置した宿駅による駅伝制を敷き，東西の大帝国間を横断する交通網，例えばシルクロードを通じた交易は，その一つの証しである。交易の拡大化は，交易によって結び付けられた各都市を通じて疫病ペストの蔓延化に拍車をかけることになる。道は，ヒトやモノに留まらず，疫病も運んだのである。

時代を現代にスリップさせ，交易活動を生産活動と読み代えれば，上の図式はそのまま現代にも妥当するであろう。そこに，ワクチン，加療，さらに隔離といった現代医療に則った感染制御の知見，工夫が添えられるならば，図式は一層，その彩りを増すかもしれない。

本稿における我々の目的は，疫病と経済活動の相互関係を探り出すことにある。

次節では，経済活動の側面は扨て措いて，ワクチンと免疫機構の相互関係を集団免疫の中に確認した後，完全ワクチン，不完全ワクチンのそれぞれが利用可能な場合における *SIS* モデルのあり方をみる。不完全ワクチンの場合の無病均衡における基本再生産数を算出し，ワクチン接種率との関係をみた後，不完全ワクチンが後退分岐を発生させる可能性をみる。

第２節では，最適人口を最適経済成長の一環として位置づけた上で，人口成長率と蓄積率を制御変数とするところで最適人口のあり方をみる。次いで，総人口規模一定の下で，加療水準と貯蓄率を制御変数とするところでの最適労働人口のあり方をみる。さらに，人口動態が想定されるところで，ワクチン接種率と貯蓄率を制御変数とするときの最適労働人口のあり方をみる。

最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第１節　感染制御

1. ワクチン付き *SIR* モデルと集団免疫

本節では，疫病感染に対する防御策としての感染制御のあり方をみる。

本項では，感染制御の一つであるワクチン接種のあり方をみる。

一般に，疫病に対する防止，防御の対策としてワクチン接種(vaccination)，加療(treatment)，隔離(quarantine/isolation)，そして予防措置(prophylaxis)が挙げられる。予防措置は，特定の伝染病を防止すべく摂られる一種の措置を指す。手洗い，うがいに始まって防御装置の着用，薬物摂取を含む。加療は，治癒，症状緩和を目標として医療処置，投薬，あるいは，病床での安静養生といった方途を用いる。

ワクチン(vaccine)は，牝牛を意味するラテン語 vacca に由来し，牛痘を意味するもので，生体に免疫(immune)を生成させて疫病を予防すべく用いられる抗原(antigen)を言う。病原体の毒性を失わせ抗原性だけを残したものに死菌ワクチン，不活化ワクチンがあり，弱毒性微生物を含んだままの生ワクチンと区別される。前者は，免疫の持続期間が短いため一定の間隔を措いて数回の摂取が必要とされる。人体の免疫機構(immune system)は，生体内に抗原が侵入したとき異物ととらえ，それに対して反応する蛋白質を生成する免疫応答(immune response)を行なう。このとき，多人数のワクチン接種者が居れば，疫病拡散化は言うまでもなく疫病突発(outbreak)も生じ難くなる。かかる効果は，集団免疫(herd immunity)と呼ばれる。

ワクチンは，疫病の100%完璧な防止を保証するものではない。たとえ，抗体が生成されていても，病原体の中で，変異(mutate)する可能性が常に存在する。いずれにしても，免疫機構は，病原体を撲滅し得なくなる。

隔離(quarantine/isolation)は，疫病反応の更なる拡散化を防ぐべく感染者を他者から遠去けておく方法である。quarantine は‘40’を意味するイタリア語 quaranta に由来し，海上検疫の停船期間日数‘40’日に対応する。健康に見えながら，潜在感染者である個人に対し適用される。isolation は，広く，一般に適用がなされる。

さて，以下で，ワクチンの集団免疫の意義を確認しておこう。[1)]

いま，疫病感染を100%阻止し得る完全ワクチンが利用可能であるものとする。総人口 N は，$N=S_0+I_0+R_0$, $\dot{N}(t)=\dot{S}(t)+\dot{I}(t)+\dot{R}(t)=0$ を満たす，すなわち，総人口規模は一定であるものとする。ただし，S_0, I_0, R_0 は，それぞれ未感染者，感染者，回復者の初期人数である。

ここで，自然出生率を μ とすれば，体系への新加入者数は μN となる。いま，総人口の p%にワクチン接種が施行されるものとすると，$p\mu N$ が，もはや感染しない回復区画 R に算入され，したがって，$1-p=q$ の割合で $q\mu N$ が感染の余地を含む未感染者区画 S に算入される。以上の展開は，完全ワクチン付きの *SIR* モデルを構成する。すなわち，

$$\dot{S} = q\mu N - \beta SI - \mu S \tag{1}$$

$$\dot{I} = \beta SI - (\mu + \alpha) I \tag{2}$$

$$\dot{R} = p\mu N + \alpha I - \mu R \tag{3}$$

がしたがう。ただし，μ は自然死亡率をも兼ね，β は未感染者 S と感染者 I の接触にともなう感染率であり，α は自然治癒による回復率である。

上の SIR モデルの均衡は，$\dot{S} = \dot{I} = \dot{R} = 0$ を満たす均衡体系

$$q\mu N - \beta SI - \mu S = 0 \tag{4}$$

$$\beta SI - (\mu + \alpha) I = 0 \tag{5}$$

$$p\mu N + \alpha I - \mu R = 0 \tag{6}$$

で表わされる。(**図-1**参照。)

いま，感染者ゼロ，すなわち $I = 0$ のときもたらされる無病均衡(disease-free equilibrium)$\mathcal{E}_0$ は，(4)式から $q\mu N = \mu S$，したがって，$S^* = qM$，(5)式から $I^* = 0$，そして，(6)式から $p\mu N = \mu R$，したがって，$R^* = pN$ がしたがうから $\mathcal{E}_0 = (qN, 0, pN)$ で与えられる。

ところで，(2)式を

$$\dot{I} = [\beta S - (\mu + \alpha)] I \tag{7}$$

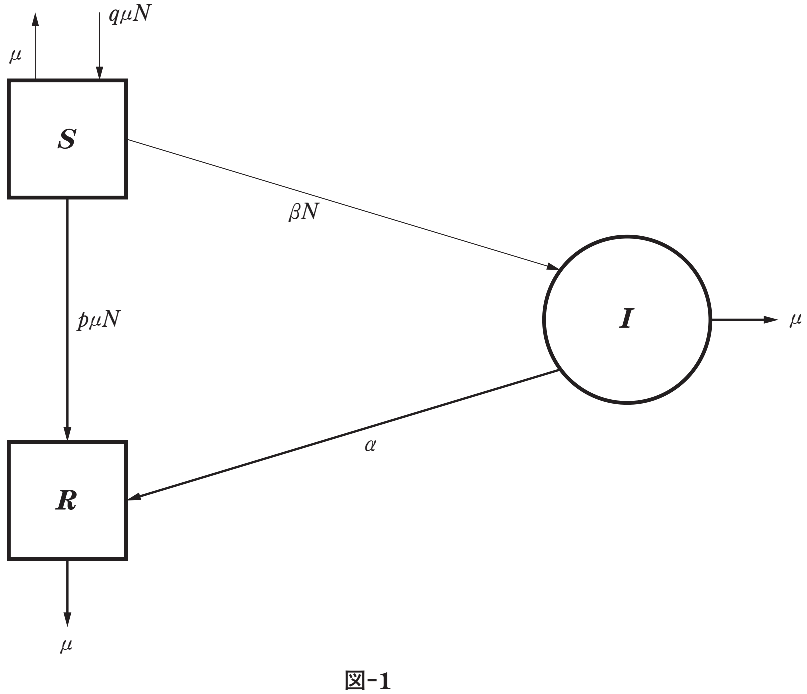

図-1

と表現し直し，$S(t) \leq S(0) = S_0$ を考慮すれば

（i） $S_0 < \dfrac{\mu+\alpha}{\beta}$ ならば，$\dot{I}|_{t=0} < 0$ となり，さらに，すべての $t \geq 0$ に対し $\dot{I}(t) < 0$ がしたがい，疫病は発生し得ない。逆に，

（ii） $S_0 > \dfrac{\mu+\alpha}{\beta}$ ならば，ある $\bar{t} > 0$ の下で $t \in [0, \bar{t}\,]$ に対し，$S(t) > \dfrac{\mu+\alpha}{\beta}$ となり $\dot{I}(t) > 0$ がしたがい，疫病が発生し得る。

しかるに，(5)式から $\dfrac{\beta N}{\mu+\alpha} = 1$ がしたがい，左辺を $\mathscr{R}_0$ と設定すれば，

$$\mathscr{R}_0 = \frac{\beta N}{\mu+\alpha} \tag{8}$$

が定義される。このとき $\mathscr{R}_0 < (>) 1$ ならば，全世界的パンデミック(pandemic)は発生しない(発生する)ことを意味する。$\mathscr{R}_0$は，ワクチンが利用できない($p=0$)場合における基本再生産数(basic reproduction number)を与える。[2] しかるに，(4)式から，$I=0$ のとき

$$qN = S \tag{9}$$

がしたがう。すなわち，(1)式においては $N=S$ であるが，ここでは，$S=qN$ と置換えられることを意味し，(8)式を考慮すれば

$$\frac{\beta N}{\mu+\alpha} = \mathscr{R}_0 \tag{10}$$

$$\text{or} \quad \frac{q\beta N}{\mu+\alpha} = q\mathscr{R}_0 = 1 \tag{11}$$

がしたがう。このとき $q\mathscr{R}_0$ はワクチンが存在するところでの基本再生産数となる。したがって，ワクチンは，q だけ本来の原再生産数を減少させることが結論される。

ここで，再生産数が $q\mathscr{R}_0 < 1$ となるようにワクチン接種率 p を決定しなければならないものとすると，q を $1-p$ で置き換え，$p > \hat{p}$ となるような $\hat{p}$ を求める必要が生ずる。すなわち

$$(1-p)\mathscr{R}_0 = (1-\hat{p}\,)\mathscr{R}_0 = 1 \tag{12}$$

がしたがわなければならない。このとき，(12)式を $\hat{p}$ について解けば

$$\hat{p} = 1 - \frac{1}{\mathscr{R}_0} \tag{13}$$

がしたがう。つまり，人口の $\hat{p}$ 割合に完全ワクチン接種が施されれば，疫病は拡散することがなくなり，全人口が保護されることになる。こうした状況が集団免疫(herd immunity)のそれである。

2. 不完全ワクチンと *SIS* モデル

本項では，不完全ワクチン付きの *SIS* モデルのあり方をみる。

ワクチンが有効となる疫病は，回復ステージに相応する免疫ステージをもつ。ワクチンが免疫機構に作用し免疫(獲得免疫)を生成させるからである。しかしながら，回復が個体を未感染者に引き

戻すだけの疫病もある。*SIS* モデルにワクチンがつけ加えられたと考えるに適応しい疫病がそれである。

いま，$V(t)$をワクチン接種済の個体数，Ψ を接種率とする。ワクチンは健康体のみに接種されるから未感染者のみがその対象となる。

ここで，ワクチンが不完全(incomplete)であり，接種済個体も感染する擦り抜け(break through)が起こり得るものとする。すなわち，$0\leq\delta\leq 1$ なる減数係数(reduction coefficient)δ に対して伝染率が $\beta\delta$ で表わされることを意味する。ワクチン効果 ε は，$\varepsilon=1-\delta$ で定義され，$\delta=0$ のとき $\varepsilon=1$ となり完全ワクチンの場合となり，擦り抜けは発生しない。逆に，$\delta=1$ のとき $\varepsilon=0$ となり，接種者は未感染者と何ら変わることない感染可能性に直面する。ワクチンは何ら予防的役割を果たさない場合となる。

ところで，総人口は一定とはならず人口動態(demography)が考慮されるところで，総自然出生率 Λ，自然死亡率 μ の下で

$$\dot{N}(t)=\Lambda-\mu N \tag{14}$$

がしたがう。[3] この微分方程式の解は

$$N(t)=N_0 e^{-\mu t}+\frac{\Lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \tag{15}$$

で与えられる。いま，$t\to\infty$ とすると，$N(t)\to\frac{\Lambda}{\mu}$ となる。$\frac{\Lambda}{\mu}$ は極限人口規模(limit population size)と呼ばれる。このとき，人口規模は一定とはならず，漸近的一定(asymptotically constant)に留まる。

しかるに，人口規模が一定でなく疫病感染者数(incidence)が未感染者 S と感染者 I の積に感染率なる比例乗数 β を乗じた値で与えられるとき，感染者数は集団行動法則(law of mass action)で与えられるとみなされ[4]，集団行動感染者数(mass action incidence)と呼ばれ βSI で表わされる。より広範に用いられるもう 1 つの表現法は，総人口 N で感染者数を正規化する標準型 $\beta SI/N$ で表わされるもので標準感染者数(standard incidence)と呼ばれる。総人口規模が一定のとき，両者の表現法による感染者数は一致するが，それが変動するところでは，異なる値がしたがう。

さて，ワクチン接種を施された個体は，未感染者区画 S からワクチン接種者区画 V へ移動するものとする。ここで，簡単化のために自然出生率 Λ と自然死亡率 μ は区画間を通じて共通であるものとする。いま，感染者区画 I のうち，自然治癒による回復率 ν で未感染者区画 S に戻る割合を χ，ワクチン接種者区画 V に戻るそれを $1-\chi$ とすると，ワクチン付きの *SIS* モデルは，接種率 Ψ の下で

$$\dot{S}=\Lambda-\frac{\beta SI}{N}-(\mu+\Psi)S+\chi\nu I \tag{16}$$

$$\dot{I}=\frac{\beta SI}{N}+\frac{\beta\delta VI}{N}-(\mu+\nu)I \tag{17}$$

$$\dot{V}=\Psi S-\frac{\beta\delta VI}{N}+(1-\chi)\nu I-\mu V \tag{18}$$

で与えられる。(**図-2**参照[5]。) ただし，総人口方程式((14)式)の下で，$\dot{N}(t)=0$ を満たす均衡総人口規模は

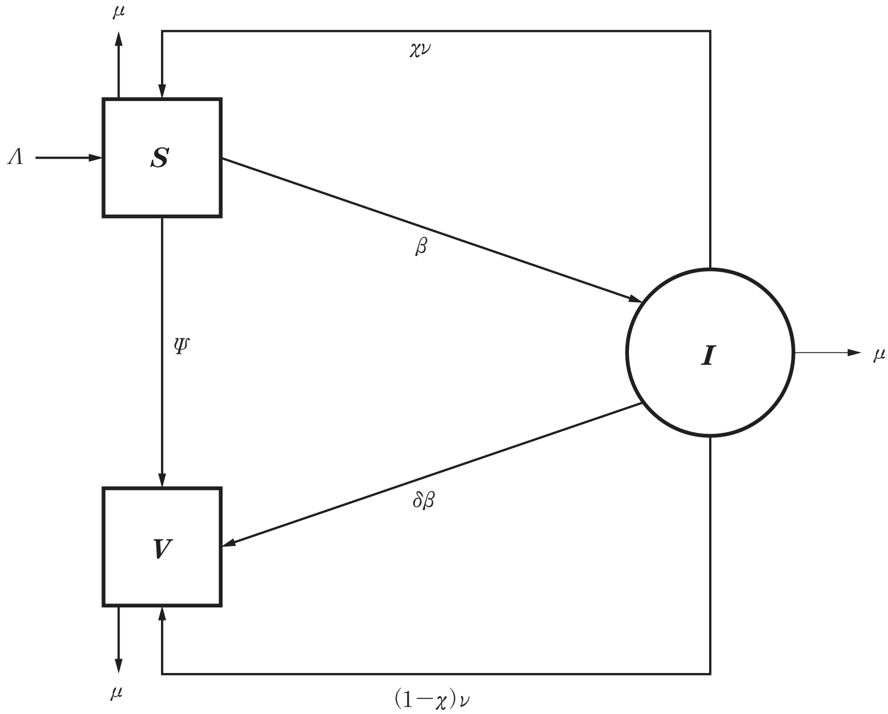

図-2

$$N = \frac{\Lambda}{\mu} \tag{19}$$

で表わされる。このとき，(14)式から，$\dot{S}=0$ より $S^* = \dfrac{\Lambda}{\mu+\Psi}$ がしたがい，(16)式から，$\dot{V}=0$ において $V^* = \dfrac{\Psi S}{\mu} = \dfrac{\Lambda\Psi}{\mu(\mu+\Psi)}$ がしたがうから，無病均衡 $\mathcal{E}_0 = \left(\dfrac{\Lambda}{\mu+\Psi}, 0, \dfrac{\Lambda\Psi}{\mu(\mu+\Psi)}\right)$ がしたがう。このとき，S 区画と V 区画の個体数の割合は

$$s^0 = \frac{\frac{\Lambda}{\mu+\Psi}}{N} = \frac{\Lambda}{\mu+\Psi}, \qquad v^0 = \frac{\frac{\Lambda\Psi}{\mu(\mu+\Psi)}}{N} = \frac{\Psi}{\mu+\Psi} \tag{20}$$

で表わされる。

項を改めて，上の不完全ワクチン付き *SIS* モデルの無病均衡における基本再生産数を算出し，その意義を確認しよう。

3. 基本再生産数

本項では，上の不完全ワクチン付き *SIS* モデルの無病均衡における基本再生産数を算出し，そ

の意義をみる。

まず，無病均衡 $\mathscr{E}_0$ の近傍において線型近似を図れば，Jacobian 行列

$$
J(\mathscr{E}_0)=\begin{bmatrix} -(\mu+\Psi) & \dfrac{\beta S}{N}+\chi\nu & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta S}{N}+\dfrac{\beta\delta V}{N}-(\mu+\nu) & 0 \\ \Psi & -\dfrac{\beta\delta V}{N}+(1-\chi)\nu & -\mu \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} -(\mu+\Psi) & \beta s^0+\chi\nu & 0 \\ 0 & \beta s^0+\beta\delta v^0-(\mu+\nu) & 0 \\ \Psi & -\beta\delta v^0+(1-\chi)\nu & -\mu \end{bmatrix}_{\frac{S}{N}=s^0,\ \frac{V}{N}=v^0} \tag{21}
$$

がしたがう。このとき，特性方程式

$$
|J(\mathscr{E}_0)-\lambda I|=\begin{vmatrix} -(\mu+\Psi+\lambda) & -\beta s^0+\chi\nu & 0 \\ 0 & \beta s^0+\beta\delta v^0-(\mu+\nu+\lambda) & 0 \\ -\Psi & \beta\delta v^0-(1-\chi)\nu & -(\mu+\lambda) \end{vmatrix}=0 \tag{22}
$$

がしたがう。

しかるに，(22)式の行列式を，まず第 1 行，次いで第 3 行，さらに第 2 行について展開すると，それぞれの固有値 $\lambda_1=-\mu\,(<0)$, $\lambda_3=-(\mu+\Psi)\,(<0)$, $\lambda_2=\beta s^0+\beta\delta v^0-(\mu+\nu)$ を得る。したがって，前項の(16),(17),(18)式をゼロと等置することによってしたがう無病均衡において

$$
\frac{\beta\dfrac{\Lambda}{\mu+\Psi}}{N}+\frac{\beta\delta\dfrac{\Lambda\Psi}{(\mu+\Psi)\mu}}{N}-(\mu+\nu)=0 \tag{23}
$$

$$
\text{or}\quad \frac{\beta(\mu+\delta\Psi)}{(\mu+\Psi)}-(\mu+\nu)=0 \tag{24}
$$

がしたがう。ここで，(24)式の両辺に $\dfrac{1}{\mu+\nu}$ を乗ずれば

$$
\frac{\beta(\mu+\delta\Psi)}{(\mu+\Psi)(\mu+\nu)}=1=\mathscr{R}(\Psi) \tag{25}
$$

を得る。(25)式は，ワクチン利用可能時の基本再生産数に他ならず，これを $\mathscr{R}(\Psi)$ と表そう。因みに，ワクチン利用不可能な場合，すなわち，$\Psi=0$ における無病均衡の基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ は

$$
\mathscr{R}_0=\frac{\beta}{\mu+\nu} \tag{26}
$$

で与えられる。

ところで，$\dfrac{S}{N}=s^0=\dfrac{\mu}{\mu+\Psi}$ は無病均衡における未感染者数の全人口に占める割合であり，$\dfrac{\beta SI}{N}$

は，１人の感染者がもたらす未感染者における２次感染者を与える。さらに，上の基本再生産数 $\mathscr{R}_0$（(26)式）を想起すれば，$\dfrac{1}{\mu+\nu}$ は，１人の感染者としての区画 I における滞留時間となるから，上の(25)式の第１項 $\dfrac{\beta\mu}{(\mu+\nu)(\mu+\Psi)}$ は無病均衡において１感染者が生み出す未感染者区画における２次感染者数を与える。同様に，$\dfrac{\beta\delta VI}{N}$ は，ワクチン接種済区画の２次感染者数を与える。したがって，無病均衡におけるワクチン接種済個体数は，$\dfrac{V}{N}=v^0=\dfrac{\Psi}{\mu+\Psi}$ であるから $\dfrac{1}{\mu+\nu}$ が１感染者としての滞留時間であることを想起すれば，(25)式の第２項 $\dfrac{\beta\delta\Psi}{(\mu+\nu)(\mu+\Psi)}$ は，無病均衡において１感染者が生み出し得るワクチン済個体の２次感染者数を与える。したがって，ワクチン利用可能時の基本再生産数は，上の両者の和で与えられることが帰結される。

しかるに，ワクチン利用時の基本再生産数 $\mathscr{R}(\Psi)$ は，ワクチン接種率 Ψ の減少函数とみなせるから，接種率が上昇すれば，それだけ再生産数は小さくなる。さらに，

$$\lim_{\Psi\to\infty}\mathscr{R}(\Psi)=\delta\mathscr{R}_0 \tag{27}$$

がしたがう。(**図-3**参照。) したがって，ワクチン効率 ε が高くなければ，すなわち，δ が十分小さくなければ，たとえ全員がワクチン接種済者であっても疫病を根絶させることはできないかもしれない。言い換えれば，ワクチン済個体も感染者化し得るから $\mathscr{R}(\Psi)$ が１以下に低下することはあり得ないことを意味している。

ところで，不完全ワクチンが連続的に接種されるときの接種されるべき個体数の臨界的割合をみておこう。しかるに，不完全ワクチンを以って疫病を根絶させるための臨界接種割合 $\hat{p}_\varepsilon$ が存在す

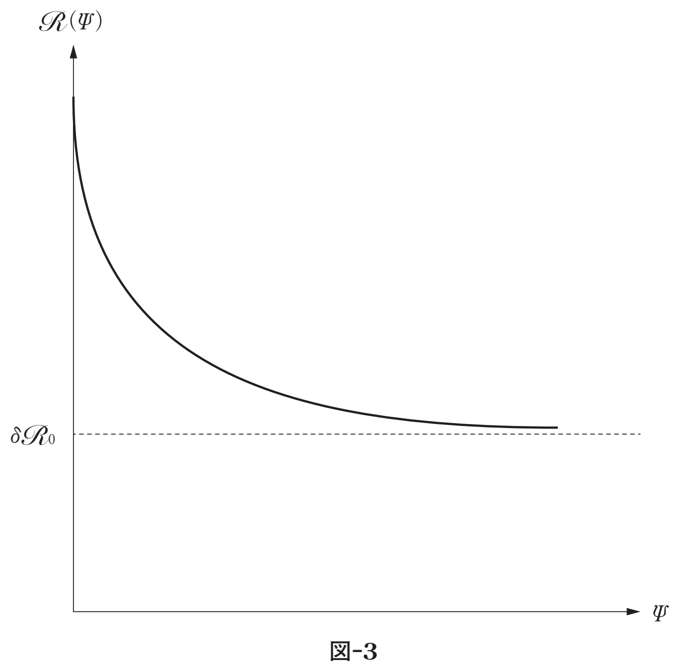

図-3

るのは，$\delta\mathscr{R}_0<1$ の場合に限られる。いま，ワクチン効率 $\varepsilon=1-\delta$ に対し

$$\delta\mathscr{R}_0=(1-\varepsilon)\mathscr{R}_0<1 \tag{28}$$

$$\text{or}\quad \varepsilon>\left(1-\frac{1}{\mathscr{R}_0}\right) \tag{29}$$

がしたがう。しかるに，$\delta\mathscr{R}_0<1$ がしたがうとき，$\mathscr{R}(\Psi^*)=1$ となるような臨界接種率 Ψ^*が存在し得る。(**図-4**参照。) $\mathscr{R}_0=\dfrac{\beta}{\mu+\nu}$ を想起すれば，Ψ^*において，

$$\mathscr{R}(\Psi^*)=\frac{\mu+\delta\Psi^*}{\mu+\Psi^*}\mathscr{R}_0=1 \tag{30}$$

がしたがい，さらに

$$\Psi^*=\frac{(\mathscr{R}_0-1)\mu}{1-\delta\mathscr{R}_0} \tag{31}$$

と変形される。このとき，総人口に占めるワクチン接種者の割合は $\Psi/(\mu+\Psi)$ となる。

いま，効率 ε をもつ不完全ワクチン接種に際して，$\delta\mathscr{R}_0<1$ ((28)式)が必要とされるとき，臨界的接種水準が存在することを確かめよう。q を $1-p$ に置き換え，p について不等式を解けば

$$\hat{p}_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{\mathscr{R}_0}\right) \tag{32}$$

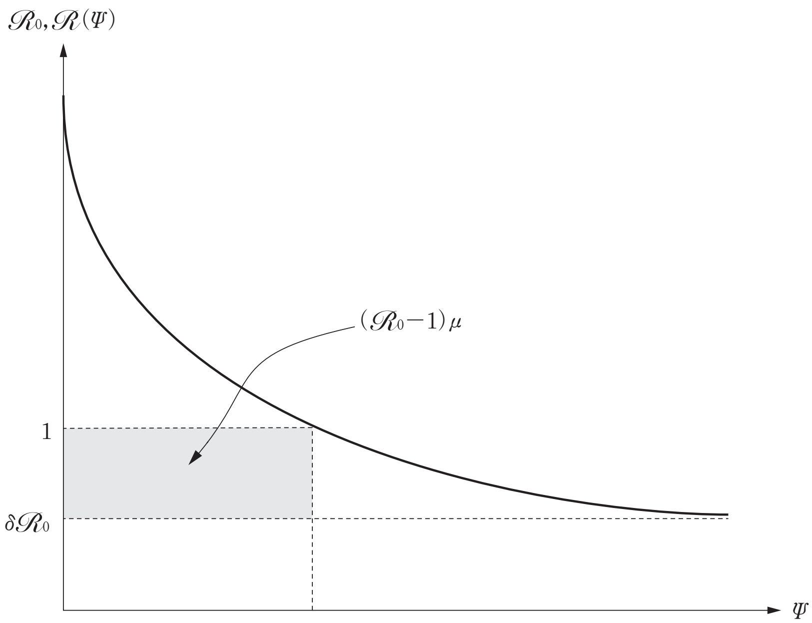

図-4

なる $\hat{p}_\varepsilon$ に対し，$p>\hat{p}_\varepsilon$ なる p を得る。このことは，人口の $\hat{p}_\varepsilon$ の割合が間違いなく接種されれば，疫病が人口間に拡散することはないことを示唆している。完全ワクチンの場合における臨界値((13)式)よりも $\frac{1}{\varepsilon}(>1)$ 倍の接種水準が要請されることが帰結される。

4. 不完全ワクチンと後退分岐

本項では，不完全ワクチン接種が施行される際に後退分岐が発生する可能性があることをみる。

上では，ワクチン利用可能時における再生産数が 1 以下になるような接種がなさるべき割合が閾値を成すことをみた。

しかるに，不完全ワクチンは，後退分岐(backward bifurcation)を生じさせ[6)]，ワクチン利用可能時の再生産数が 1 以下であっても，地方的均衡(endemic equilibrium)が存在し，安定性を保持するという不都合を内包している。かかる分岐の発生因は，本来の未感染者と同時にワクチン接種にともない未感染者化したそれとの 2 種の将来的感染可能性をもつ未感染者が存在することにある。

まず，後退分岐が生ずるための必要かつ十分条件を得るために，地方的均衡(endemic equilibrium)を求めよう。

いま，総人口 N で正規化し，$s=\frac{S}{N}, i=\frac{I}{N}, v=\frac{V}{N}$ と比率表示を施し，$\frac{\Lambda}{N}=\mu$ を想起すれば，第 2 項の(16)-(18)式の体系の均衡体系

$$0=\mu-\beta si-(\mu+\Psi)s+\chi\nu i \tag{33}$$

$$0=\beta si+\beta\delta vi-(\mu+\nu)i \tag{34}$$

$$0=\Psi s-\beta\delta vi+(1-\chi)\nu i-\mu\nu \tag{35}$$

がしたがう。(33)式を s について，(35)式を v について解き，それぞれの値

$$s=\frac{\mu+\chi\nu i}{\beta i+\mu+\nu}, \qquad \nu=\frac{\Psi s+(1-\chi)\nu i}{\beta\delta i+\mu} \tag{36}$$

を(34)式に代入すれば

$$\beta(\mu+\chi\nu i)(\beta\delta i+\mu+\delta\Psi)+\beta\delta(1-\chi)\nu i(\beta i+\mu+\nu)$$
$$=(\mu+\nu)(\beta si+\mu)(\beta i+\mu+\Psi) \tag{37}$$

を得る。ここで，Martcheva, *op, cit.,* の示唆にしたがって，(37)式において β を i の函数 $\beta(i)$ とみなし，陰函数の微分を施せば

$$\beta'(0)$$
$$=\frac{\beta\{\delta(\mu+\nu)(\mu+\Psi)+\mu(\mu+\nu)-\chi\nu(\mu+\delta\Psi)-\beta\delta\mu-\delta(1-\chi)\nu(\mu+\Psi)\}}{\mu(\mu+\delta\Psi)} \tag{38}$$

を得る。

ところで，$\mathscr{R}(\Psi)=\frac{\beta(\mu+\delta\Psi)}{(\mu+\nu)(\mu+\Psi)}$ を想起し，β について解けば

$$\beta=\frac{(\mu+\nu)(\mu+\Psi)\mathscr{R}(\Psi)}{\mu+\delta\Psi} \tag{39}$$

がしたがい，さらに，$\eta=\dfrac{(\mu+\nu)(\mu+\Psi)}{\mu+\delta\Psi}$ と設定すれば，

$$\beta=\mathscr{R}(\Psi)\eta \tag{40}$$

と表現し直される。このとき，(40)式を考慮すれば，$\beta'(0)<0$ は，

$$\delta(\mu+\nu)(\mu+\Psi)+\mu(\mu+\nu)<\chi\nu(\mu+\delta\Psi)+\frac{(\mu+\nu)(\mu+\Psi)\delta\mu}{\mu+\delta\Psi}+\delta(1-\chi)\nu(\mu+\Psi) \tag{41}$$

を意味する。したがって，上の(41)式が満たされるとき，そして，その限りにおいて，臨界値 $i=0$ ($\mathscr{R}(\Psi)=1$)において分岐は後退する。

この事実を確かめるために，上の(37)式を β で除し，i に関する 2 次方程式 $Ai^2+Bi+C=0$ の形に書き換えることにする。このとき，各係数は，

$$A=\beta\delta\mu \tag{42}$$

$$B=\mu(\mu+\nu)+\delta(\mu+\nu)(\mu+\Psi)-\beta\mu\delta-(\mu+\delta\Psi)\chi\nu-\delta(1-\chi)\nu(\mu+\Psi) \tag{43}$$

$$C=\mu(\mu+\Psi)(1-\mathscr{R}(\Psi)) \tag{44}$$

で表わされる。ここで，各係数を $\mathscr{R}(\Psi)$ の函数として表わし，β を消去すれば，

$$A=\mathscr{R}(\Psi)\eta\delta\mu \tag{45}$$

$$B=\mu(\mu+\nu)+\delta(\mu+\nu)(\mu+\Psi)-\mathscr{R}(\Psi)\eta\mu\delta-(\mu+\delta\Psi)\chi\nu-\delta(1-\chi)\nu(\mu+\Psi) \tag{46}$$

$$C=\mu(\mu+\Psi)(1-\mathscr{R}(\Psi)) \tag{47}$$

を得る。(ここで，$\mu=0.01, \nu=3, \chi=1, \delta=0.1, \Psi=1$ と設定すると後退分岐が現われる。**図-5**参照。)

いま，$\delta=0$，すなわち，ワクチンが完全であるものとすれば

$$\beta'(0)=\frac{\mu+\nu-\chi\nu}{\mu}=1+\frac{(1-\chi)\nu}{\mu}\,(>0) \tag{48}$$

がしたがい，後退分岐は発生しない。また，$\Psi=0$，すなわち，ワクチンが利用不可能であるものとすると，後退分岐は発生せず，このとき，$\mathscr{R}_0<1$ とすれば，無病均衡が大局的安定(globally stable)となる。

以上から，後退分岐が存在するためには，不完全であるならば，再生産数が 1 以下どころか，それ以下では地方的均衡が存在し得ないような更に小さな値以下であることが必要となる。したがって，不完全ワクチンで疫病に対処するのは難かしいかもしれないが，ワクチンの利用は，他のパラメータ空間を拡げ，ワクチンに従属する再生産数を 1 以下に下げることも可能となり，無病均衡が局所的安定(locally stable)となる。因みに，μ, Ψ, δ が所与かつ一定であるとすれば，ワクチンが利用不可能なとき(ν–β)空間における無病均衡が安定的となる領域は，そこで $\mathscr{R}_0<1$ であるから，$\mu+\nu>\beta$ で表わされる。また，ワクチンが利用可能なとき無病均衡が局所的安定となる領域は，

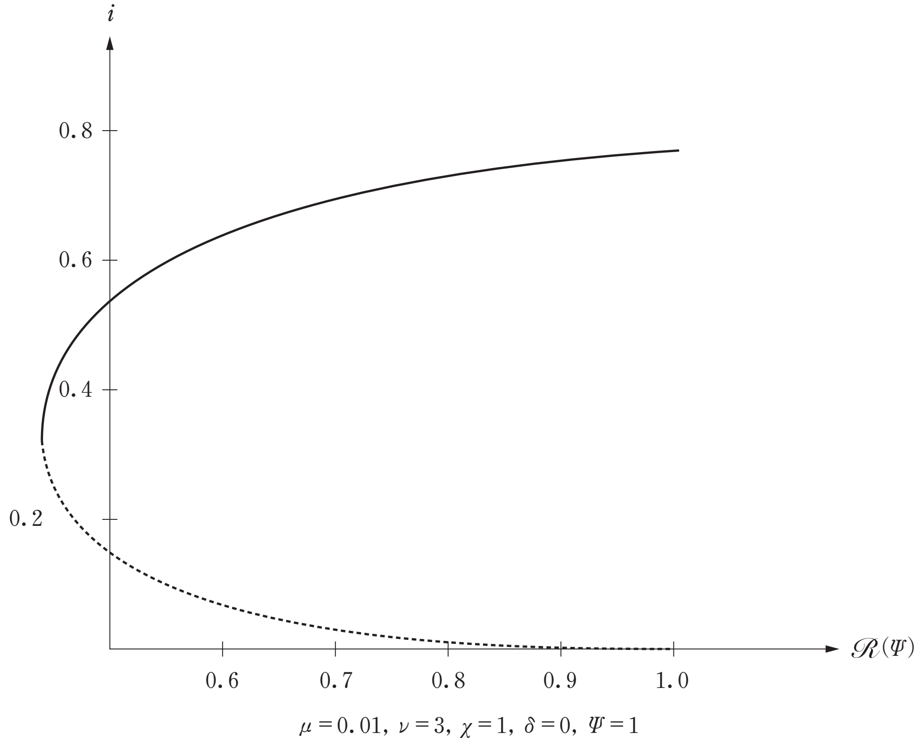

図-5

$$\frac{\mu+\Psi}{\mu+\delta\Psi}(\mu+\nu)>\beta \tag{49}$$

で与えられる。しかるに，$(\mu+\Psi)/(\mu+\delta\Psi)$部分が1より大きいから，(49)式が与える領域は，更に広いそれとなる。

1） 集団免疫(herd immunity)について，例えば，Brauer＝Castillo-Chavez［1］(Chap. 9, Sec. 9-2)，Brauer＝Castillo-Chavez＝Feng［2］(Chap. 3, Sec. 3-2)，Martcheva［10］(Chap. 9)等参照。

2） 基本再生産数(basic reproduction numbers)の定義，算出法のより包括的議論としてDiekman＝Heesterbeek＝Merz［5］参照。また，van den Driessche＝Watmough［14］も参照。

3） かかる定式化は，ロジスティック・モデル(logistic model)の単純形とみなし得る。

4） 集団行動法則(law of mass action)の史的展望について，Heesterbeek［8］参照。

5） Martcheva, *op. cit.*, Fig 9.1 (p. 219)に準ずる。

6） 後退分岐(backward bifurcation)は疫学者が好んで用いる命名法である。例えば，Dushoff＝Huang＝Castillo-Chavez［6］，Hadeler＝van den Driessche［7］，Martcheva＝Thieme［11］等参照。数学的文献における熊手型分岐(pitchfork bifurcation)に相当しよう。

第 2 節　最適人口

1．最適人口論と最適経済成長論

本節では，社会における疫病感染の拡散化がその経済活動の萎縮化を招く依存関係の存在が示唆される情況の下で，社会にとって最適な両者のバランス状態のあり方を疫病の感染制御を通じて最適経済成長の問題として検討する。

本項では，最適人口論と最適経済成長論との関係を探る。

すでに示唆したごとく，人口爆発ないし過密人口の存在する情況が暗黙の先入意識として共有される中，社会の最適な人口規模のあり方を模索する試みは，少くとも Wicksell にまで遡ることができるごとくである。Wicksell の問題提起は，一定の環境の下で，社会にとって最も有利に作用する人口密度はいか程のものであるか，であった。かかる Wicksell の問題提起を継いで Cannon, Dalton, Wolf, そして Robbins といった経済学者が関心を募らせていった。彼らの一致した見解は，大雑把に言えば，最適人口(optimum population)は，所与の天然資源，技術水準，標準的労働時間の下で，一人当たりの産出量の最大化を保証するそれであった。

しかるに，一社会の経済厚生(economic welfare)は，資本蓄積率と人口成長率を定める政策のあり様に左右される。いかなる時点においても，人口の最適規模は既存の資本ストック量に制約され，最適貯蓄率は既存の人口規模に制約される。したがって，現在から無限時点までのすべての世代の総割引厚生の最大化が最適性基準として示唆されてくる。言い換えれば，問題は，すべての時点の最大厚生を逐次実現するような貯蓄率と人口規模を選択することとなる。

各世代の厚生が生活水準を反映しなければならないとすれば，最大化されるべきは一人当たりの厚生の割引合計値であるとする主張も成立し得る。以下では，すべての個人の厚生が増加的，2 回微分可能，かつ消費率の厳密な凹函数を成す効用函数(utility function) v で測られるものとする。さらに，各世代世代の消費割当て分は，完全平等(perfectly egalitarian)なる分配を最善のものとする。

さて，ここで，総消費 $C(t)$ は，生産函数 $F(\cdot)$ を用いて

$$C(t)=F(K(t), L(t))-\dot{K}(t) \tag{50}$$

で表わされるものとする。$K(t)$ は，非減耗型の資本ストック，$L(t)$ は，総人口数(労働力(labor force))，$K(0)$ は資本ストックの初期賦存量である。ここで，実現可能性(feasibility)は，初期条件

$$C(0)\geq 0, K(0)\geq, L(0)>0 \tag{51}$$

が満たされることを要請する。

改めて，現在から無限時点までのすべての世代の割引厚生の総和の多寡によって政策代案の是非の比較を図るものとする。Koopmans［ 9 ］, von Weizsäcker［15］にしたがって，$t\geq T$ なるすべての t に対して

$$\int_0^t e^{-\rho t}L^*(t)v(C^*(t)/L^*(t))d\tau\geq\int_0^t e^{-\rho t}L(t)v(C(t)/L(t))d\tau \tag{52}$$

を満たすような T が存在するならば，$\{C^*(t), L^*(t)\}$ は $\{C(t), L(t)\}$ より望ましいと見なされるものとする。さらに，もし $\{C^*(t), L^*(t)\}$ が他のすべての実現可能な政策よりも望ましいならば，最適政策（optimal policy）と呼ばれるものとする。かかる設定は，最適経済成長（optimal economic growth）の概念におけるそれに他ならず，したがって，最適人口は最適経済成長の文脈の中に位置づけられてしまうことになる。[7)]

さて，生産過程において，生産函数 F は規模に関して収穫一定性（constant returns to scale）を満たすものとする。直ちに

$$F(K,L)=LF(K/L,1)=Lf(K/L)=Lf(k) \tag{53}$$

がしたがう。ただし，$c=C/L, k=K/L, n=\dot{L}/L$ は，人口の一人当たりの変量となる。(53)式は，さらに

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-n(t)k(t) \tag{54}$$

に帰着する。このとき，

$$f(0)>0, f'(0)=\infty\ ;\ f'(\infty)=0, f(\infty)=\infty \tag{55}$$

が仮定される。いま，貯蓄率を s で表わせば，人口一人当たりの消費は $c=(1-s)f(k)$ で表わされる。

さて，人口成長率 n と貯蓄率 s を制御変数とする人口一人当たりの消費からの総割引効用の最大化の問題は，時間要素を削除すれば

$$\max_{s,n}\int_0^\infty Lv[(1-s)f(k)]e^{-\rho t}dt \tag{56}$$

$$s.t.\quad \dot{k}=sf(k)-nk \tag{57}$$

$$\dot{L}=nL \tag{58}$$

で表わされる。(56)-(58)式の問題は，最適人口問題を含む最適経済成長問題となる。このとき，$s\leq 1$，さらに，n に対して上下限 $-m$，M による制約 $-m<n<M$ が課せられる。[8)]

かかる問題は，Pontriagin の最大値原理（Maximum Principle）の適用を可能とする。直ちに，Hamilton 函数

$$\mathscr{L}=Lv[(1-s)f(k)]e^{-\rho t}+\varphi e^{-\rho t}nL+\xi e^{-\rho t}[sf(k)-nk] \tag{59}$$

が定義される。ただし，$\varphi e^{-\rho t}, \xi e^{-\rho t}$ は，それぞれ，k, n の動学方程式に関する補助変数で，資本，労働の影の価格（shadow price）を与える。まず，労働 L の影の価格は

$$\frac{d[\varphi e^{-\rho t}]}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial L}=ve^{-\rho t}-\varphi e^{-\rho t}n \tag{60}$$

$$\text{or}\quad \dot{\varphi}=\varphi(\rho-n)-v \tag{61}$$

を満たさなければならない。次に，資本の影の価格は，

$$\frac{d[\xi e^{-\rho t}]}{dt}=-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k}=-Le^{-\rho t}(1-s)f'(k)v'-\xi e^{-\rho t}[sf'(k)-n] \tag{62}$$

$$\text{or}\quad \dot{\xi}=-[sf'(k)-(n+\rho)]\xi-L(1-s)f'(k)v' \tag{63}$$

を満たさなければならない。ここで，$\zeta=\dfrac{\xi}{L}$ と設定し，

$$\dot{\zeta}=\frac{\dot{\xi}}{L}-\frac{\xi}{L}n \tag{64}$$

を考慮すれば，(63)式は

$$\dot{\zeta}=-[sf'(k)-\rho]\zeta-(1-s)f'(k)v' \tag{65}$$

と書き改められる。

さて，Hamilton 函数は，制御変数 s, n について最大化されなければならない。

まず，貯蓄率 s が満たすべき条件

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial s}=-Lf(k)v'+\xi f(k)=0 \tag{66}$$

は，最大化の必要かつ十分条件を与える。しかるに，$s\to 1$ につれて $v'\to\infty$ となるから明らかに内点解の存在が示唆される。ここで，(66)式の両辺に $\dfrac{1}{L}$ を乗じ，$\zeta=\dfrac{\xi}{L}$ を想起すれば，(66)式は，

$$\zeta=v' \tag{67}$$

と変形される。

次に，人口成長率 n が満たすべき最大化は，n の上下限を考慮しなければならない。$-m<n<M$ なる n について

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial n}=\varphi L-\xi k=0 \tag{68}$$

$$\text{or}\quad \varphi=k\zeta \tag{69}$$

がしたがう。$n=M$ のとき，すなわち，M が束縛的(binding)となるとき

$$\varphi>k\zeta \tag{70}$$

がしたがい，$n=-m$ のとき

$$\varphi<k\zeta \tag{71}$$

がしたがう。

いま，(67)式を用いれば，(65)式は

$$\frac{dv'}{dt}=-[f'(k)-\rho]v' \tag{72}$$

と表現し直される。ここで，(67)式から

$$v''=\dot{\xi} \tag{73}$$

がしたがうから，これを(65)式に代入すれば

$$\frac{dv'}{dt}=v''\dot{c}=-[f'(k)-\rho]v' \tag{74}$$

がしたがう。(74)式は，Ramsey ルール(Ramsey Rule)に他ならない。

上の最適条件を一人当たりの消費のタームで表現し直せば，上の(20)-(22)式の制約の下で，体系

$$\dot{\varphi}=(\rho-n)\rho-v(c) \tag{75}$$

$$\dot{c}=-[v'(c)/v''(c)][f'(k)-\rho] \tag{76}$$

$$\dot{k}=f(k)-c-nk \tag{77}$$

を得る。

上の議論においては，無費用で制御変数としての人口成長率を改変し得るものと想定されている。以下の疫病感染が支配するところでは，制御変数の改変は，それ自体有償となり，誘因に訴える要因と実費の要因から成る非線型費用函数にしたがう費用投入が要請される。

2. 最適人口と最適加療率

本項では，人口規模が一定に保たれる社会における疫病感染の拡散化の下での最適経済成長，最適人口のあり方をみる。

疫病感染の拡張化に際しては，感染制御の手段として 3 通りが想定し得る。1 つは，ワクチン接種(vaccination)で未感染者 S が対象とされる。2 つ目は，加療(medical treatment)で感染者 I が対象とされ，もう 1 つの隔離(isolation/quarantine)と併用されることも少なくない。

いま，人口規模 N が一定に保たれる，すなわち，$N=S+I$，かつ $\dot{N}=0$ がしたがう社会を想定する。このとき，$S=N-I$ で表わせば，体系は，単一方程式から成る SIS モデルのそれに帰着する。このとき，感染が集団行動法則(Mass Action Rule)に基づき個体間接触から発生するものとすれば，感染率 β (transmission rate)，自然治癒率(natural recovery rate) ν，そして自然死亡率 μ (natural death rate)に対して

$$\dot{I}(t)=\beta(N-I)I-(\mu+\nu)I \tag{78}$$

がしたがう。このとき，加療率 $u(t)$ が適用されれば，加療による $u(t)I$ の治癒者が生まれ，(78)式は

$$\dot{I}(t)=\beta(N-I)I-(\mu+\nu)I-u(t)I \tag{79}$$

と書き改められる。

しかるに，疫病感染は，個々人にとっては確率的現象であり，したがって加療は，感染が確認された際にのみ選択的に必要となり，需要されるサービスである。すなわち，制御行為である加療行

為は選択的需要(option demand)型の公共財とみなし得る。[9)]

さらに，加療に伴なう費用は，２つの要因から構成される。第１は，加療対象となる感染者数自体を減少させようとする誘因(incentive)に働きかける要因であり，定数 w に対し，$wI(t)$ で与えられ，第２は，加療行為に掛かる実費に当たる要因であり，非線型２次函数 $u^2(t)$ で与えられるものとする。加療行為が公共財とみなされるとき，その費用要因は，自らに顕在化するか否に関らず未感染者，感染者の別なく共同負担されて然るべきとする合理的根拠が留保される。

加えて，感染者は，その感染が確認された時点で生産の場からの退出を要請されるものとする。感染の拡散化は生産に携わる労働人口の減少化，したがって産出量の縮少化といった連鎖にしたがう社会の経済厚生のロスを招くことになる。このとき，感染は，個々人の日常的生活の場においてのみ集団的接触の繰返しによってもたらされることになる。

以上から，労働人口 L は，未感染者 S のみに限られることになり，総人口規模一定，すなわち，$\dot{N}=\dot{S}+\dot{I}=0$ の下で $\dot{L}=\dot{S}=-\dot{I}$ がしたがうから，(労働)人口成長率 n_T は，

$$n_T=\frac{\dot{L}}{L}=-\frac{\dot{I}}{L} \tag{80}$$

と表現される。上の(79)式を代入すれば，(80)式は

$$n_T=-\frac{[\beta(N-I)-(\mu+\nu)-u(t)]I}{L} \tag{81}$$

と表現し直される。(81)式は，(労働)人口成長率はもはや制御変数とはならず，新たな制御変数 $u(t)$ の決定を俟って定まる従属変数となることを示唆している。

さて，総人口を構成する各個人が享受し得る一人当たりの純消費水準 $c(t)$ は

$$c(t)=\frac{L(1-s)f(k)-wI-u^2(t)}{N} \tag{82}$$

で表わされる。労働人口が未感染者のみに限定されるところから，労働人口 L による生産物が総人口 N に分配される変則性が生ずる。(82)式から，社会の総人口全員の総効用 W は

$$W=Nv\left(\frac{L(1-s)f(k)-wI-u^2(t)}{N}\right) \tag{83}$$

で表わされる。

このとき，一人当たりの純消費からの効用の割引値の総和の最大化を要請する最適経済成長の問題は，

$$\max_{s,\,u(t)}\int Nv\left(\frac{L(1-s)f(k)-wI-u^2(t)}{N}\right) \tag{84}$$

$$s.t.\quad \dot{k}=sf(k)-n_Tk \tag{85}$$

$$\dot{L}=n_TL \tag{86}$$

で表わされる。直ちに，Hamilton 函数

$$\mathscr{L}_T = Nv\left(\frac{L(1-s)f(k)-wI-u^2(t)}{N}\right)e^{-\rho t}+\varphi e^{-\rho t}n_T L$$

$$+\xi e^{-\rho t}[sf(k)-n_T k] \tag{87}$$

が定義される。

まず，労働 L に関する補助変数 $\varphi e^{-\rho t}$ について

$$\frac{d}{dt}[\varphi e^{-\rho t}] = -\frac{\partial \mathscr{L}_T}{\delta L} = -e^{-\rho t}[(1-s)f(k)+w]v'-\varphi e^{-\rho t}n_T \tag{88}$$

$$\text{or} \quad \dot{\varphi} = \varphi(\rho-n)-[(1-s)f(k)+w]v' \tag{89}$$

が満たされなければならない。

次に，資本に関する補助変数 $\xi e^{-\rho t}$ について

$$\frac{d}{dt}[\xi e^{-\rho t}] = -\frac{\partial \mathscr{L}_T}{\partial k} = -e^{-\rho t}L(1-s)f'(k)v'-\xi e^{-\rho t}[sf'(k)-n_T] \tag{90}$$

$$\text{or} \quad \dot{\xi} = -[sf'(k)-(n_T+\rho)]\xi - L(1-s)f'(k)v' \tag{91}$$

が満たされなければならない。

ここで，再び，$\zeta = \dfrac{\xi}{L}$ と設定し，

$$\dot{\zeta} = \frac{\dot{\xi}}{L} - \frac{\xi}{L}n_T \tag{92}$$

を想起すれば，(91)式は

$$\dot{\zeta} = -[sf'(k)-\rho]\zeta-(1-s)f'(k)v' \tag{93}$$

と書き改められる。

さて，Hamilton 函数は，制御変数 $s, u(t)$ について最大化されなければならない。

まず，貯蓄率 s が満たすべき最大化のための必要かつ十分条件は，

$$\frac{\partial \mathscr{L}_T}{\delta s} = -Lv'+\xi = 0 \tag{94}$$

で与えられる。$\zeta = \dfrac{\xi}{L}$ を想起すれば，(94)式は

$$\zeta = v' \tag{95}$$

と変形される。

ここで，(93),(95)式から

$$\dot{\zeta} = [\rho - f'(k)]v' \tag{96}$$

がしたがうことを考慮し，(95)式を時間に関して微分すれば

$$\dot{\xi}=\frac{dv'}{dt} \tag{97}$$

を得るから，(96),(97)式は

$$v''\dot{c}=-(f'(k)-\rho)v' \tag{98}$$

を導く。(98)式は，感染制御として感染者に対する加療行為が施行される場合における Ramsey ルールを与える。

次に，加療率 $u(t)$ が満たすべき最大化のための必要かつ十分条件は

$$\frac{\partial\mathscr{L}_T}{\partial u(t)}=-2u(t)v'+\varphi L\frac{\partial n_T}{\partial u(t)}-\xi\frac{\partial n_T}{\partial u(t)}k=0 \tag{99}$$

で与えられる。しかるに，

$$\frac{\partial n_T}{\partial u(t)}=\frac{I}{L} \tag{100}$$

となるから，(99)式は，

$$2u(t)v'=\left(\frac{\xi}{L}k-\varphi\right)I \tag{101}$$

と変形される。しかるに，$\zeta=\dfrac{\xi}{L}$ を想起すれば，最適制御としての最適加療率 $u^*(t)$

$$u^*(t)=\frac{(\zeta k-\varphi)I}{2v'} \tag{102}$$

がしたがう。(102)式を満たす $u^*(t)$ は，Hamilton 函数の臨界点(critical point)を成し，$v'>0, v''<0$ の仮定の下で

$$\frac{\partial^2\mathscr{L}_T}{\partial u(t)^2}=-2v'+4u(t)^2v''<0 \tag{103}$$

を導く。(103)式は，$u^*(t)$ が所与の資本蓄積率に対し社会的厚生を最大化する最適制御としての最適加療率を与えることを意味している。

上の最適条件を一人当たりの消費のタームで表現し直せば，新たな体系

$$\dot{\varphi}=\varphi(\rho-n_T)-[(1-s)f(k)+w]v' \tag{104}$$

$$\dot{c}=-[v'(c)/v''(c)][f'(k)-\rho] \tag{105}$$

$$\dot{k}=f(k)-c-n_Tk \tag{106}$$

がしたがう。

人口成長率を無費用で制御し得るとされた前項での均衡体系と上の新均衡体系との比較は簡単にはなし得ないが，労働に関する影の価格において，感染者数を削減に向かわせる誘引項 wv' が働い

ていることは注意に値する。さらに，総人口と労働人口の乖離にともない，本項の新均衡体系では，資本蓄積に関わる$(1-s)f(k)v'$に労働人口削減に関わる誘引項wv'が加算される効果が作用する構図が見られる。また，資本と労働人口の影の価格でそれぞれ評価した感染者の評価益に最適加療率が依存していることが帰結される。

3. 最適人口と最適ワクチン接種率

本項では，人口動態の余地を認め人口規模が変動するところで，拡散化する疫病感染に対し感染制御手段として未感染者を対象とするワクチン接種が施行されるときの社会の最適経済成長，最適人口のあり方をみる。

前節の(16)−(18)式が構成するSIS体系において，ワクチン接種率Ψは一定のパラメータとみなされていた。しかるに，ワクチン接種率が感染制御政策の一環とみなされるとき，それは制御変数とみなされ，パラメータ機能をもつ接種率Ψは，制御変数$u(t)$に置き換えられ，新たなSIS制御体系が定義される。すなわち，新制御体系

$$\dot{S}=\Lambda-\frac{\beta SI}{N}-(\mu+u(t))S+\chi\nu I \tag{107}$$

$$\dot{I}=\frac{\beta SI}{N}+\frac{\beta\delta VI}{N}-(\mu+\nu)I \tag{108}$$

$$\dot{V}=u(t)S-\frac{\beta\delta VI}{N}+(1-\chi)\nu I-\mu V \tag{109}$$

がしたがう。ただし，δは，$0\leq\delta\leq1$を満たす感染減数係数(infection reduction coefficient)である。すでに見たごとく，$\delta=0$は完全ワクチンの場合，$\delta=1$は予防効果ゼロのワクチンの場合に当たる。($0<\delta<1$，すなわち，不完全ワクチンの連続的接種の場合について，**図-6**参照。)

ところで，ワクチン接種に際して，前項の加療の場合におけると同様に2つの費用要因が想定される。1つは，ワクチン接種人数$u(t)S$であり，費用要因として掲げることによって接種人数の低減化を促がす誘因項となり，もう1つは，ワクチン接種の実費であり，非線型で接種率の2乗$u^2(t)$で表わされるものとする。このとき，ワクチン接種は選択的需要型の公共財とみなされ総費用は総人口全員による一律共同負担方式が適用されることは，前項の加療の場合と同じである。

さて，本項においては，感染者は言うに及ばず未感染者中のワクチン未接種者も生産活動の場から退出を要請されるものとする。このことは，ワクチン接種者のみが生産活動の場への参画を容認されることを示唆している。

以上から，労働人口Lは，ワクチン接種者Vのみに限られ，$L=V$から労働人口の成長率n_Vは

$$n_V=\frac{\dot{L}}{L}=\frac{\dot{V}}{L} \tag{110}$$

で表わされ，上の(109)式に代入すれば，(110)式は

$$n_V=\frac{u(t)S-\beta\delta LI/N+(1-\chi)\nu I-\mu L}{L} \tag{111}$$

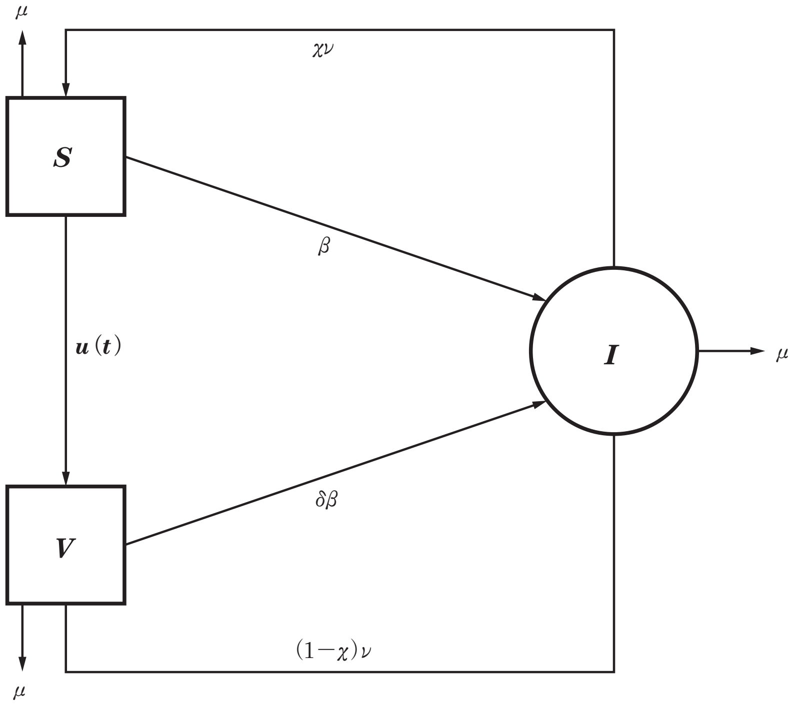

図-6

と表現し直される。(111)式は，労働人口率 n_V がワクチン接種率という新たな制御変数 $u(t)$ の決定を俟って定まる従属変数となることを示唆している。

　さて，総人口を構成する各個人が享受し得る一人当たりの純消費水準 $c(t)$ は

$$c(t)=\frac{L(1-s)f(k)-wu(t)S-u^2(t)}{N} \tag{112}$$

で表わされる。ワクチン接種者のみから成る労働人口 L による生産物が総人口 N に分配される。このとき，社会総人口全員の総効用 W は，

$$W=Nv\left(\frac{L(1-s)f(k)-wu(t)S-u^2(t)}{N}\right) \tag{113}$$

で表わされる。

　このとき，一人当たりの効用の割引値の総和の最大化を要請する最適経済成長の問題は

$$\max_{s,u(t)}\int Nv\left(\frac{(L(1-s)f(k)-wu(t)S-u^2(t)}{N}\right) \tag{114}$$

$$s.t.\quad \dot{k}=sf(k)-n_Vk \tag{115}$$

$$\dot{L}=n_VL \tag{116}$$

$$\dot{S}=\Lambda-\frac{\beta SI}{N}-(\mu+u(t))S+\chi\nu I \tag{117}$$

$$\dot{I}=\frac{\beta SI}{N}+\frac{\beta\delta LI}{N}-(\mu+\nu)I \tag{118}$$

で表わされ，直ちに，Hamilton 函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_V=&Nv\left(\frac{L(1-s)f(k)-wu(t)S-u^2(t)}{N}\right)e^{-\rho t}+\varphi e^{-\rho t}n_V L\\&+\xi e^{-\rho t}[sf(k)-n_V k]+\lambda_S e^{-\rho t}\left[\Lambda-\frac{\beta SI}{N}-(\mu+u(t))S+\chi\nu I\right]\\&+\lambda_I e^{-\rho t}\left[\frac{\beta SI}{N}+\frac{\beta\delta LI}{N}-(\mu+\nu)I\right]\end{aligned} \tag{119}$$

が定義される。

まず，労働 L に関する補助変数 $\varphi^{-\rho t}$ について

$$\frac{d}{dt}[\varphi e^{-\rho t}]=-[v'(1-s)f(k)+\varphi n_V]e^{-\rho t}-e^{-\rho t}\lambda_I\frac{\beta\delta I}{N} \tag{120}$$

$$\text{or}\quad \dot{\varphi}=\varphi(\rho-n_V)-[(1-s)f(k)]v'-\lambda_I\frac{\beta\delta I}{N} \tag{121}$$

が満たされなければならない。

次に，資本 k に関する補助変数 $\xi^{-\rho t}$ について

$$\frac{d}{dt}[\xi e^{-\rho t}]=-e^{-\rho t}L(1-s)f'(k)v'-\xi e^{-\rho t}[sf(k)-n_V] \tag{122}$$

$$\text{or}\quad \dot{\xi}=-[sf'(k)-(n_V+\rho)]\xi-L(1-s)f'(k)v' \tag{123}$$

が満たされなければならない。再び，$\zeta=\dfrac{\xi}{L}$ と設定すれば

$$\dot{\zeta}=-[sf'(k)-\rho]\zeta-(1-s)f'(k)v' \tag{124}$$

と書き改められる。

また，未感染者 S に関する補助変数 $\lambda_S e^{-\rho t}$ について

$$\frac{d}{dt}[\lambda_S e^{-\rho t}]=\left[\frac{\beta I}{N}+\mu+u(t)+\rho\right]e^{-\rho t}\lambda_S-\lambda_I e^{-\rho t}\frac{\beta I}{N}+e^{-\rho t}wu(t)v' \tag{125}$$

$$\text{or}\quad \dot{\lambda}_S=\left[\frac{\beta I}{N}+\mu+u(t)+\rho\right]\lambda_S-\frac{\beta I}{N}\lambda_I+wu(t)v' \tag{126}$$

が満たされなければならない。

さらに，感染者 I に関する補助変数 $\lambda_I e^{-\rho t}$ について

$$\frac{d}{dt}[\lambda_I e^{-\rho t}]=\lambda_S e^{-\rho t}\left[\frac{\beta S}{N}-\chi\nu\right]-\lambda_I e^{-\rho t}\left[\frac{\beta S}{N}+\frac{\beta\delta L}{N}-(\mu+\nu)\right] \tag{127}$$

$$\text{or}\quad \dot{\lambda}_I=\left[\frac{\beta S}{N}-\chi\nu\right]\lambda_S-\left[\frac{\beta}{N}(S+\delta L-(\mu+\nu)-\rho\right]\lambda_I \tag{128}$$

が満たされなければならない。

さて，Hamilton 函数は，制御変数 $s, u(t)$ について最大化されなければならない。

まず，貯蓄率 s が満たすべき最大化のための必要かつ十分条件は，

$$\frac{\partial \mathscr{L}_V}{\partial s}=-Lv'+\xi=0 \tag{129}$$

で与えられる。再び，$\zeta=\dfrac{\xi}{L}$ と設定すれば，上と同様の手続きから

$$\zeta=v' \tag{130}$$

がしたがう。(130)式を時間に関して微分すれば

$$\dot{\zeta}=\frac{dv'}{dt} \tag{131}$$

がしたがい，(130),(131)式は

$$v''\dot{c}=-(f'(k)-\rho)v' \tag{132}$$

を導き，再び，(132)式は，Ramsey ルールを与える。前項の(98)式と同形，すなわち，加療行為の施行の場合とワクチン接種の場合と，形式上，同じ形をとる。

次に，ワクチン接種率 $u(t)$ が満たすべき最大化のための必要かつ十分条件は

$$\frac{\partial \mathscr{L}_V}{\partial u(t)}=-(2u(t)+wS)v'+\varphi\frac{\partial n_V}{\partial u(t)}L-\xi\frac{\partial n_V}{\partial u(t)}k-\lambda_S S=0 \tag{133}$$

で与えられる。しかるに，$\dfrac{\partial n_V}{\partial u(t)}=\dfrac{S}{L}$ がしたがうから，(133)式は，

$$(2u(t)+wS)v'=(\varphi L-\xi k-\lambda_S)\frac{S}{L}=\varphi-\zeta k-\frac{\lambda_S}{L} \tag{134}$$

と変形される。したがって，最適なワクチン接種率

$$u^*(t)=\frac{\varphi-\zeta k-\lambda_S\mu-wSv'}{2v'} \tag{135}$$

がしたがう。(135)式を満たす $u(t)$ は Hamilton 函数の臨界点を成し，$v'>0$，$v''<0$ の仮定の下で

$$\frac{\partial^2\mathscr{L}_V}{\partial u(t)^2}=-2v'+(2u+wS)^2v''<0 \tag{136}$$

を導く。(135)式は，$u^*(t)$ が所与の資本蓄積率に対し，社会的厚生を最大化する最適ワクチン接種率を与えることを意味する。

上の最適条件を一人当たりの消費のタームで書き改めれば，新たな体系

$$\dot{\varphi}=\varphi(\rho-n_V)-\lambda_I\frac{\beta\delta I}{N}-[(1-s)f(k)-wu(t)]v'(c) \tag{137}$$

$$\dot{\lambda}_S=\lambda_S\left[\frac{\beta I}{N}+\mu+u(t)+\rho\right]-\lambda_I\frac{\beta I}{N}+wu(t)v'(c) \tag{138}$$

$$\dot{\lambda}_I=\lambda_S\left[\frac{\beta S}{N}-\chi\nu\right]-\lambda_I\left[\frac{\beta}{N}(S+\delta L-(\mu+\nu)-\rho\right] \tag{139}$$

$$\dot{c}=-[v'(c)/v''(c)][f'(k)-\rho] \tag{140}$$

$$\dot{k}=f(k)-c-n_Vk \tag{141}$$

がしたがう。

上のワクチン接種をともなう新体系においては，消費率 $\dot{c}$，資本蓄積率 $\dot{k}$ を除けば疫病関連の制約条件が追加された分，均衡体系の構造，最適ワクチン接種率の構造は共に複雑化している。ワクチン接種，とりわけ不完全ワクチン接種を通じた最適人口の実現は容易ではなかろう。

7） 最適経済成長（optimal economic growth）に関わる初期の作業として，Koopmans［9］, von Weizsäcker［15］, Mirlees［13］, Dasgupta［3］等参照。

8） 人口成長率を制御変数とする接近法について，Dasgupta［4］参照。本項の議論もその示唆に多くを負っている。さらに，その先行作業として，Meade［12］も参照。

9） 例えば，Zeckhauser［16］等参照。

結びにかえて

いずれが先決変数であるか，俄かには判じ難い疫病と貧困。

20世紀に入り，需要重視のJ. M. Keynesによる再評価を得て復権を遂げるまで，19世紀を通して正統の地位をD. Ricardo（1772–1823）に譲り渡し放しで，人口爆発に対して憂慮に堪えなかったT. R. Malthus（1766–1834）は，疫病と貧困を人口爆発解消のための要因として掲げていた。

１人当たりの人口成長率は，人口密度の減少函数であり，人口が，環境の持ち堪える上限である自然扶養力に到達すると人口密度に依存する減衰項（dumping factor）が人口自然成長率を上回り，人口は一気に減少に転ずる。かかる図式は，ベルギー人数学者Pierre Verhulstが1838年に唱えたロジスティック・モデル（logistic model）である。Malthusの死の僅か4年後の創唱であった。しかるに，かかる人口に関する議論は，致命的な欠落の環（missing link）を内包していた。人口動態と不可分の関係に立つ筈の経済動態との関わりの看過である。両者が繋がれて一本の連環と成るまでにはそれから更に70年，新マルサス主義（Neo-Malthusianism）を奉ずるJ. G. K. Wicksellの登場まで俟たなければならなかった。

Wicksell以下追随者たちの議論を最適人口論と呼ぶとき，為に，それは最適経済成長論の枠中に取込まれていくこととなる。そこでは，先決された過剰人口分が直接的人命の欠損を以って帳消しされる単線的図式に拠らず，所定の経済厚生を最大化する経済と人口の調和の関係の中にその過

剰分が融合化，内部化されていく複線的図式が用意される。
上では，過剰人口の前提は排され，疫病感染による人命の欠損を想定することなく，疫病感染者，あるいは未感染者中のワクチン未接種者の経済活動，生産活動の場からの退出の要請，すなわち，労働人口の欠損を想定することで，疫病感染拡散下における最適経済成長，最適人口のあり様をみた。そこでは，疫病の存在しない情況下において制御変数とされた人口成長率に代わって，感染拡散下においては，加療率，ワクチン接種率が制御変数とされた。
加療をともなう *SIS* モデルにおいて，最適加療率が導出され，労働人口の影の価格，１人当たりの消費率，資本蓄積率の動学方程式から成る均衡体系が特定された。
次いで，ワクチン接種をともなう *SIS* モデルにおいて最適ワクチン接種率が導出され，労働人口，感染者，未感染者それぞれの影の価格，１人当たりの消費率，資本蓄積率の動学方程式から成る均衡体系が特定された。
ウイルスの複数株，変異株が存在する場合への拡張化は，本稿の議論の発展化の一方向であろう。

References

［1］ F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, 2nd ed., Springer, 2012.
［2］ ________, ________, and Z. Feng, *Mathematical Models in Epidemiology*, Springer, 2019.
［3］ P. S. Dasgupta, “Optimum Growth when Capital is Not-transferable,” *Review of Economic Studies*, 36, 1969.
［4］ ________, “On the Concept of Optimum Population,” *Review of Economic Studies*, 36, 1969.
［5］ O. Diekman, J. A. P. Heesterbeek, and J. A. J. Metz, “On the Definition and Computation of the Basic Reproduction Ratio R_0 in Models for Infectious Diseases in Heterogeneous Populations,” *Journal of Mathematical Biology*, 28, 1990.
［6］ J. Dushoff, W. Huang, and C. Castillo-Chavez, “Backward Bifurcations and Catastrophe in Simple Models of Fatal Diseases,” *Journal of Mathematical Biology*, 36, 1998.
［7］ K. P. Hadeler, and P. van den Driessche, “Backward Bifurcation in Epidemic Control,” *Mathematical Bioscience*, 146, 1997.
［8］ J. A. P. Heesterbeek, “The Law of Mass-action in Epidemiology : A Historical Perspective,” in *Ecological Paradigms Lost : Routes of Theory Change*, B. E. Beisner, ed., Elsevier Academic Press, 2005.
［9］ T. C. Koopmans, “On the Concept of Optimal Growth,” in *The Econometric Approach to Development Planning*, North Holland, 1965.
［10］ M. Martcheva, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, Springer, 2015.
［11］ ________, and H. R. Thieme, “Progression Age Enhanced Backward Bifurcation in an Epidemic Model with Super-infection,” *Journal of Mathematical Biology*, 46, 2003.
［12］ J. E. Meade, *Trade and Welfare*, Oxford University Press, 1955.
［13］ J. A. Mirlees, “Optimum Growth when Technology is Changing,” *Review of Economic Studies*, 34, 1967.
［14］ P. van den Driessche and J. Watmough, “Reproduction Numbers and Subthreshold Epidemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission, *Mathematical Bioscience*, 180, 2002.
［15］ C. C. von Weizsäcker, “Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon,” *Review, of Economic Studies*, 32, 1965.
［16］ R. Zeckhauser, “Resource Allocation with Probabilistic Individual Preferences,” *American Economic Review Proceedings*, 59, 1965.