

非線型経済における乗数-加速度因子モデル*

中島 巖**

〈要約〉

利用可能な分析道具の限定性に縛られる中、経済学は、固有の分析技術の開発に倦むがごとくに、便宜さの故に、経済分析を線型モデルに恃み続けてきたということが出来るかもしれない。

伝統的乗数-加速度因子モデルは、そうした線型モデルが描き出す経済の文脈において導き出された大きな成果の1つであることに間違いはなからう。

その一方で、かかる線型モデルの主要な構成要素である投資函数を非線型のそれに置き換えることによって経済の非線型化を図るいくつかの試みがなされた。Hicks [6] は、その代表例を構成する。しかるに、そこでの非線型化は、離散型モデルに拠るといふ窮屈さを伴うものであった。

Puu [16] は、Hicks の離散型モデルの連続型モデル化を図り、非線型投資函数として双曲線正接函数を適用し、乗数-加速度因子モデルを非線型経済の文脈の中に甦らせた。

以下では Puu の示唆に拠りながら、非線型経済の文脈において乗数-加速度因子モデルが導く解方程式の近似解を求める。近似解の導出に際しては、天文学に由来する特異摂動法に加えて変形座標法の手法が適用される。

解方程式は、三角函数の重ね合わせの形の解を与える。しかるに、そこには、非周期性を導く項が発現し得る。そこで、特異摂動法が非周期項を焙り出し、変形座標法がそれを排除し、周期項のみの重ね合わせとしての周期解を回復させる条件を表出する。最後に地域間交易が展開する非線型空間経済の文脈において、発散波として導かれる近似解のあり方が示される。

JEL 区分：E3, E32

キーワード：乗数-加速度因子モデル、非線型投資函数、特異摂動法、変形座標法

* 本項は、コロナ禍の最中に作成された。1日も早い終息を願うばかりである。

** 専修大学名誉教授

序

経済学は物理学に情情的にも技術的にも寄り添いながら、しかし、その影を踏むことなく歩みを進めたきた。

1985年に B. J. West が主張した科学の進歩に関する発展段階論を持ち出すまでもなく、経済学は、その必要性の認識の度合の強弱はともかく、非線型化モデルが導入され非線型化に向かっていることは事実であろう。West の云う第 5 段階に差し掛かっているのかもしれない。

自由意志をもつ個人を基礎に置く啓蒙主義によって、折角、Laplace の悪魔が跋扈する決定論的世界観から脱却し得る機会に接しながら、経済学は、線型(動学)システムだけで事足りる決定論的世界観に取り込まれ、それを映しただけの典型としてのパターン化された形だけの個人である「経済人」を創り上げてしまった。

実は、現実の経済の営みに近づけるためには、システムの非線型化が必須条件であると認識はしているのかもしれない。それを可能にする数学や物理学における、先行的技術開発の遅速に拘束されて、儘ならないということかもしれない。

例えば、線型(動学)モデルが広く普及してきたのは、常に解くことを可能にする分析道具が利用可能であるからに過ぎず、解の存在性は判明していても、それを明示化し得る技術の利用可能性が限定的であるがために、非線型(動学)モデルの普及が滞ってきたということかもしれない。

マクロ経済学の文脈において、非線型化への一方の流れを導いたのが、1939年の Samuelson [15] の乗数-加速度因子モデルである。Samuelson がそこで意図したのは、乗数効果に通ずる Keynes 的消費函数と加速度原理を生み出す消費の成長率に基づく投資函数の結合化であった。以後、パラメータ値の設定の変化に応じて、様々な周期解と非周期解の導出が可能となることが確かめられてきた。

もう一方の流れを導いたのは、Marx 主義的傾向を負う Kalecki によって1937年に提示された Keynes モデルとは別の投資函数に影響を受けて、1940年に Kaldor [8] が提示した Keynes 的消費函数と所得に対して非線型を成す投資函数とから成る体系であった。以来、それは、非線型動学分析の手引きとしての役割を果たし続けてきた。

ところで、Puu [14] は、Hicks [6] による離散的な天井(ceiling)と床(floor)を考慮に入れた非線型投資函数をもつ乗数-加速度因子モデルを連続的な双曲線正接函数(hyperbolic tangent)をもつそれとして、伝統的経済の文脈において、次いで、地域間交易が展開される空間経済の文脈において甦らせた。

本稿における我々の目的は、上の Puu の示唆にしたがって、双曲線正接函数を成す非線型投資函数をもつ乗数-加速度因子モデルが導く解のあり方を吟味することにある。

まず、次節では、乗数-加速度因子モデルを非線型投資函数をもつ伝統的経済への拡張化を図った後、周期的な近似解の導出に必要な特異摂動法(singular perturbation)と変形座標法(strained coordinates)の手法を確認する。第 2 節では、まず、伝統的経済の文脈において非線型投資函数をもつ乗数-加速度因子モデルが導く周期的近似解のあり方をみた後、地域間交易が展開する空間経済の文脈において同モデルが導く発散波(disperse wave)としての解のあり方をみる。

最後に、若干の結論的言及がなされる筈である。

なお、本稿は最終稿ではない。

第1節 乗数-加速度因子モデルと非線型化

1. 非線型投資函数

本節では、非線型投資函数の導入によって伝統的乗数-加速度因子モデルの非線型経済への拡張化を行なう。

本項では、Smuelson = Hicks 型の離散型乗数-加速度因子モデルの連続化を図り、非線型投資函数の導入により解方程式の非線型化を図る。¹⁾

経済の動学分析化への試みを担った乗数 (multiplier) は、産出量と投資の関係づけを図るものであるが、唯一の事前的関係として消費函数を用いるのみで投資面に関する事前的配慮を欠いたものであると言える。それ故、誘発投資を産出量の変化に関係づける加速度原理 (acceleration principle) との結合化が促されるのは極く自然な展開であったとも言えよう。

いま、産出量(所得) $Y(t)$ 、誘発投資 $I(t)$ のフロー量に対する時間ラグを含まない加速度因子の表現は、

$$I(t) = I(\dot{Y}(t)) \quad (1)$$

でなされ、さらに、投資性向 v を用いて

$$I(t) = v\dot{Y}(t) \quad (2)$$

と線型近似される。

ここで、指数形式で連続的に配分される遅れを表わす指數的時間ラグを想定すれば、反応率 κ で反応するか、あるいは、時間定数 $T = \frac{1}{\kappa}$ で遅れを伴うところで、誘発投資と産出量の関係は、

$$\dot{I}(t) = -\kappa(I(t) - v\dot{Y}) \quad (3)$$

で示される。このとき $v\dot{Y}$ は時間ラグのない加速度因子であり、 t 時点における投資率は、この加速度因子によって決定される。しかるに、(3)式は、実際の投資率は、それより時間的に遅れ、その増加率 $\dot{I}(t)$ は、不足分の一定割合であり、その割合は、反応の速度を示すことを示唆している。

ここで、乗数-加速度因子モデルに時間ラグを導入する。以下で、時間要素を省略する。

まず、需要側は、集計需要量 Z が時間ラグを伴うことなく

$$Z = I + C = I + (1-s)Y \quad (4)$$

で与えられる。 s は、所得に対する貯蓄率である。次に、供給側は、産出量 Y が需要 Z に対し、時間定数 $T = \frac{1}{\lambda}$ の時間ラグを伴って反応するものとすれば、

需給均衡条件

$$Y = I + (1-s)Y \quad (5)$$

は、 $T = \frac{1}{\lambda}$ の時間ラグを伴う適応型反応

$$\dot{Y} = \lambda(I - sY) \quad (6)$$

と同値となり、モデルの乗数部分を与える。

他方、資本ストックの変化が所得変化に比例する、すなわち、

$$\dot{K} = I = v\dot{Y} \quad (7)$$

を主張する加速度原理は、反応係数 κ による時間ラグ反応を伴うとき

$$\dot{I} = \kappa(v\dot{Y} - I) \quad (8)$$

を意味する。

ここで、(8)式を時間に関して微分すれば

$$\ddot{Y} = \lambda(\dot{I} - s\dot{Y}) = \lambda(\kappa v\dot{Y} - \kappa I) \quad (9)$$

$$\text{or } \ddot{Y} - (\lambda s - \kappa v)\dot{Y} + \lambda\kappa I = 0 \quad (10)$$

がしたがう。

いま、(6)式を I について解き(10)式に代入すれば

$$\dot{Y} + (\lambda s - \kappa v\lambda + \lambda)\dot{Y} + \lambda\kappa sY = 0 \quad (11)$$

を得る。ここで、Samuelson, Hicks にしたがって、時間ラグ係数 $\kappa = \lambda = 1$ となるべく時間単位を定義すれば、(11)式は

$$\ddot{Y} + (1 + s - v)\dot{Y} + sY = 0 \quad (12)$$

と表現し直される。

ところで、投資函数の非線型化の試みは、古く1940年に Kaldor によって先鞭がつけられ、その後、Goodwin, Hicks 等が後に続いた。²⁾

Kaldor においては、所得に対する投資性向が定常水準から乖離するとき減少を示し、さらに、所与の所得水準の下で、資本ストックが増加すれば、やはり減少するという、異なる資本ストック値に対し S 字を描く S 字型投資函数が想定された。かかる想定は、内生的なりミット・サイクルを生み出すことができることから、その後の経済学の分析における非線型動学システムの標準モデルの役割を果たすに至っている。

他方、Hicks は、乗数-加速度因子モデルに完全雇用の天井(ceiling)と独立投資の床(floor)を取り込む形で非線型投資函数モデルを提示した。資本が更新されぬまま自然率で減耗していく時の食いつぶし(disinvestment)に対する下限が存在し、また、資本以外の他の生産要素が束縛的(binding)となり、それらの成長率が投資に限度を画する時の投資(investment)に対する上限が存在するという論理づけによって線型不等式による制約を導入した。

しかるに、連続的分析において、上限と下限をもつ非線型加速度因子の性格をもつ簡単なモデルの一例は、加速度因子 $v\dot{Y}$ を $v \tanh \dot{Y}$ に置き換えるものである。 \tanh (hyperbolic tangent) は、双曲線正接函数と呼ばれる双曲線函数 (hyperbolic function) の1つで、双曲線余弦函数 (hyperbolic co-

sine), 双曲線正弦函数 (hyperbolic sine)

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (13)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (14)$$

に対して, 前者に対する後者の比の形

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (15)$$

で定義される。 $\tanh z$ は, $z=0$ の近傍で z に対してほぼ線型を成し, より大きな $|z|$, すなわち, より大きな正ないし負の値に対しては 1 に漸近する。(図-1参照。)

かかる非線型化によって, (12)式は

$$\ddot{Y} + (1+s)\dot{Y} - v \tanh \dot{Y} + sY = 0 \quad (16)$$

と書き改められる。

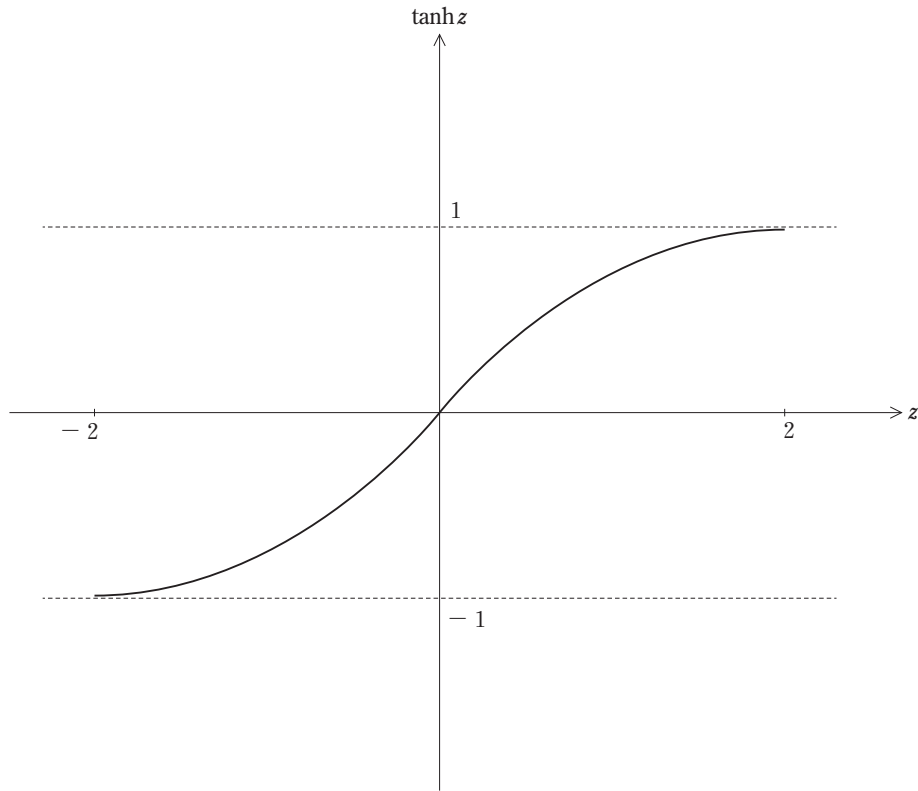


図-1

しかるに、截切された Taylor 展開 (truncated Taylor expansion) $\dot{Y} - \frac{1}{3}\dot{Y}^3$ を用いることによって、(16)式を、さらに、

$$\ddot{Y} + Y = a\dot{Y} - b\dot{Y}^3 \quad (17)$$

と書き改めよう。³⁾このとき、 $a = \sqrt{s(v+s-1)}$ 、 $b = \sqrt{s^3}/3$ であり、調整速度に関わりをもつ時間スケールが、 \sqrt{s} を用いて、速い時間 (fast time) と遅い時間 (slow time) とに変更されている。

(17)式の表現は、Rayleigh 方程式 (Rayleigh's equation) のそれに酷似しており、また、簡単な変形を加えれば van der Pol 振動子 (van der Pol oscillator) を表わす方程式に変換される。⁴⁾

2. 特異摂動法

本項では、前項における解方程式の近似解を得るための手続きとして、まず、特異振動法のあり方をみておこう。⁵⁾

摂動法 (perturbation) は、小さな値の摂動パラメータを含む微分方程式に対して、その解をパラメータのべき級数を用いて近似化を図ろうとする方法である。そのとき、高次の非線型微分方程式 (体系) をより低次のもう 1 つの微分方程式で近似化を図る方法は、特異摂動法 (singular perturbation) と呼ばれる。

いま、例として、常微分方程式

$$x(\varepsilon, t) = e^{-\varepsilon t} \quad (18)$$

を考えよう。⁶⁾このとき、パラメータ ε はゼロの近傍にあるものとする。ここで、 ε は、べき級数に Taylor 展開され、最初の 3 項で截切 (truncate) されれば、(18)式は、

$$x(\varepsilon, t) = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 \quad (19)$$

で表わされる。高次項を表わす $O(\varepsilon^3)$ は、誤差項を成す。誤差項は、いかなる大きさの t の一定値に対しても誤差が(19)式右辺の最小項 $\frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2$ よりも小さくなるように十分小さな ε を選択し得ることを意味している。しかしながら、同項のトレンドは、 ε をどんなに小さく設定しても、 t が十分大きくなれば、近似が破綻してしまう可能性がある。函数 $x = e^{-\varepsilon t}$ の最初の 3 項までの Taylor 展開に対して、**図-2**がしたがう。⁷⁾

ここで、近似の精確さが、ゼロに近い ε の範囲と可能な限り大きな t の範囲の間のバランスに依存することをみるために、微分方程式

$$\ddot{x} + \varepsilon x + x = 0, \quad t \geq 0 \quad (20)$$

を想定しよう。⁸⁾このとき、初期条件

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (21)$$

が伴ない、さらに、 $|\varepsilon| \ll 1$ が満たされるものとする。(20)式の完全解 (exact solution) は直ちに、

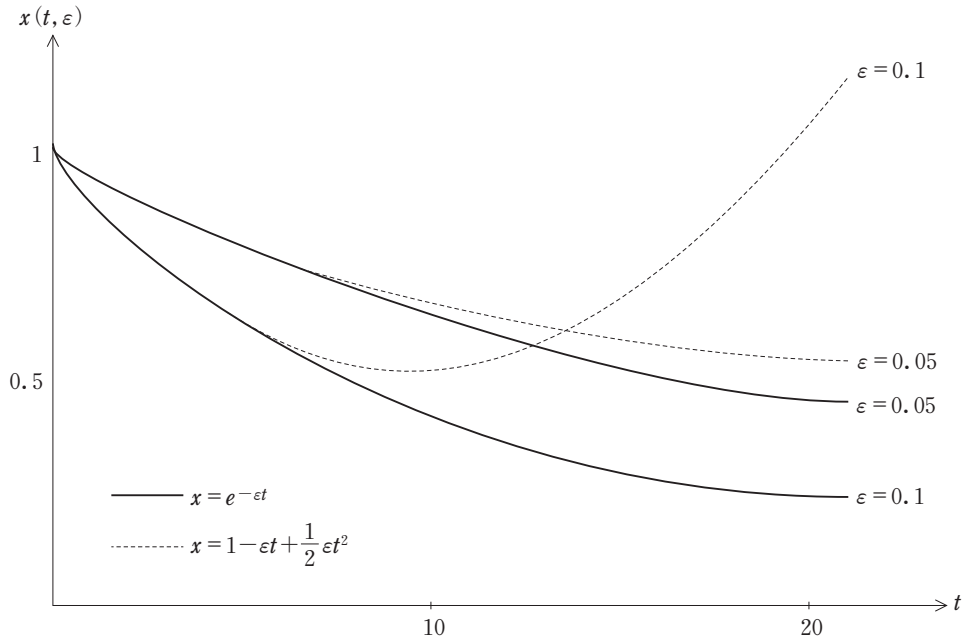


図-2

$$x(t, \epsilon) = \cos(1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} t \tag{22}$$

で表わされる。

さて、小さな ϵ に関する摂動を考えよう。まず、級数

$$x(t, \epsilon) = x_0 + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \tag{23}$$

を想定し、これを(22)式に代入し、微分方程式列 $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$ を導くために級数 $\epsilon^n (n = 0, 1, \dots)$ の係数を逐次的に当てはめていけば、

$$x(t, \epsilon) = \cos(1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} t \approx \cos t - \frac{1}{2} \epsilon t \sin t + \frac{1}{8} \epsilon^2 (t \sin t - t^2 \cos t) \tag{24}$$

がしたがう。この近似の精度は、ゼロに近い ϵ の範囲とできるだけ大きくあって欲しい t の範囲に依存する。(24)式は、右辺の3つの項が急速に減少することがない程 t が大きくなれば、直ちに近似は所与の ϵ に対して無効となることを示唆している。 ϵt の値が小さくなくなると、直ちに近似の破綻が生ずる。したがって、(24)式の近似は、

$$\epsilon t \ll 1 \tag{25}$$

がしたがうとき、その限りにおいて有効となることが結論される。このとき、 ϵt を t とは別のもう1つの時間パラメータ、すなわち、遅い時間(slow time)とみなす時間スケール(time-scale)の変更の手續きの導入が示唆されてくる。

さらに、(24)式には、近似を破綻させる重大の要因としての共振現象 (resonance) の発生の可能性が潜んでいる。

ここで、特異摂動法の手順と意義を明確化するために、一般的な形で厳密な定義を下しておく。⁹⁾

いま、それぞれ、 n 次元空間 R^n に属するベクトル $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 、 m 次元空間 R^m に属するベクトル $\mathbf{y}(t) \in R^m$ に対する非線型微分方程式体系

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] \quad (26)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] \quad (27)$$

が与えられるものとする。ここで、 $\mathbf{f}: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 、 $\mathbf{g}: R^n \times R^m \rightarrow R^m$ はベクトル函数である。

ε は摂動パラメータであり、 $\varepsilon \neq 0$ なるいかなる ε に対しても、体系(26),(27)式は $n+m$ 本の微分方程式から成る体系となる。しかしながら、 $\varepsilon = 0$ となるとき、(27)式は

$$\mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)] = 0 \quad (28)$$

に帰着するから、体系(26),(27)式は、 n 本の微分方程式と m 本の代数方程式から成る体系となる。

このとき、(28)式を構成する m 本の方程式は解くことが可能であり

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)] \quad (29)$$

の形を成す $\mathbf{x}(t)$ のタームでの $\mathbf{y}(t)$ の陽表的表現が得られるものとする。ただし、 $\mathbf{h}: R^n \rightarrow R^m$ なるベクトル函数である。したがって、(26)式と(28)式は、 n 本の微分方程式体系

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)]\} \quad (30)$$

に帰着する。

ところで、(27)式において、 $\varepsilon = 0$ と設定する手続きは、特異摂動と呼ばれる。この手続きによって、(27)式の性質が微分方程式から代数方程式に完全に変更されるからである。かかる手法の目的は、(30)式の簡単化された体系を調べることによって、そこから $\varepsilon \neq 0$ なる ε をもつ原体系((26),(27)式)に関する結論を引き出すことにあり、それは、高次元の非線型体系をより低次元のもう1つの体系で近似しようとする試みから生まれたものである。

さて、上述の共振現象を確かめるために、小さな摂動パラメータ ε を含む微分方程式

$$\ddot{x}(t) + x(t) + \varepsilon [x(t)]^3 = 0 \quad (31)$$

を考える。¹⁰⁾ このとき、初期条件

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0 \quad (32)$$

が伴うものとする。かかる方程式は、非線型バネで留められた(単位)質量の振動を表わす。

$\varepsilon = 0$ のとき、初期条件((32)式)を満たす解は、直ちに、

$$y_0(t) = \cos t \quad (33)$$

与えられる。 $\varepsilon \neq 0$ であるとき、(31),(32)式の解を ε のべき級数

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (34)$$

で表わすものとする。

まず、(34)式を(31)式に代入し、整理すれば

$$(\ddot{x}_0 + x_0) + \varepsilon(\ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3) + \varepsilon^2(\ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3) + O(\varepsilon^3) = 0 \quad (35)$$

を得る。 $O(\varepsilon^3)$ は、 ε の3次以上の高次項で無視し得るものとし、 ε のすべてのベキ係数をゼロに等置すれば

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad x_0(0) = 1, \quad \dot{x}_0(0) = 0 \quad (36)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_0^3 = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad (37)$$

⋮

がしたがう。

まず、 $x_0(t)$ について解けば、直ちに

$$x_0(t) = \cos t \quad (38)$$

がしたがう。しかるに、 $x_0(t)$ は $\varepsilon=0$ に対応する(31),(32)式の解となるから、(38)式の成立は、予想を違えるものではない。

次に、 $x_1(\cdot)$ について解き、三角関数の公式を想起すれば

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + x_1(t) &= -x_0^3(t) = -\cos^3 t \\ &= -\frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t \end{aligned} \quad (39)$$

がしたがう。(39)式の解は、

$$x_1(t) = -\frac{3}{8} t \sin t - \frac{1}{32} \cos t + \frac{1}{32} \cos 3t \quad (40)$$

で与えられる。しかるに、(40)式右辺の第1項 $-\frac{3}{8} t \sin t$ は、(39)式の $-\frac{3}{4} \cos t$ に対応する。しかるに、 $-\frac{3}{4} \cos t$ は、(39)式の同次解(homogeneous solution)¹¹⁾となるから $t \sin t$ に対し比例的反応を生む。かかる反応は、共振反応(resonance response)と呼ばれ、共振現象をもたらす因となる。かかる項は、天文学の文献においては、混合永年項(mixed-secular term)ないし、単に、永年項(secular term)と呼ばれるそれである。(図-3参照。)

ここで、上の $x_0(t)$ と $x_1(t)$ を結合すれば、(31),(32)式の解は、

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{32}\right) \cos t - \frac{3\varepsilon}{8} t \sin t + \frac{\varepsilon}{32} \cos 3t \end{aligned} \quad (41)$$

と表現される。この $x(t)$ は、 t の非有界関数となるから、かかる近似は、受け容れ難い、破綻した

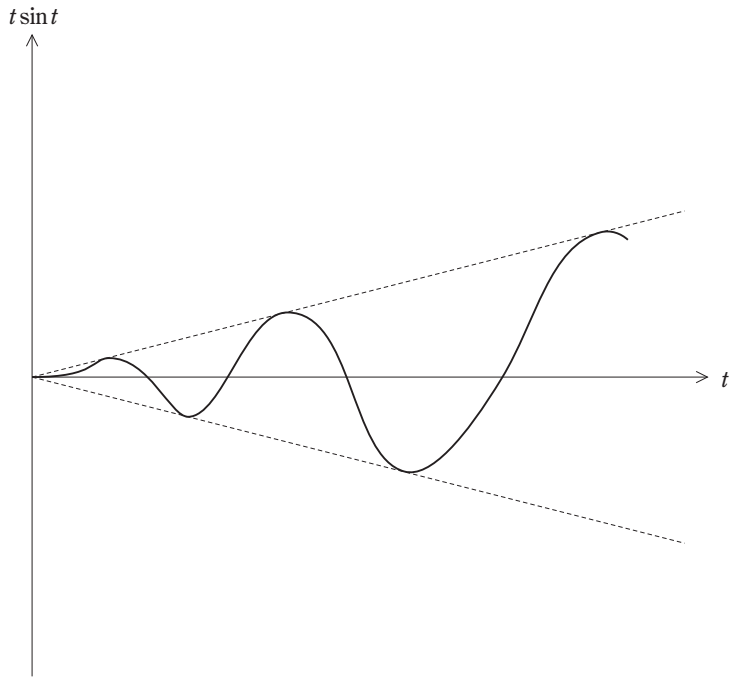


図-3

それとなる。

項を改めて、上の共振現象の因となり得る永年項を回避するための手続きをみてみよう。

3. 変形座標法

本項では、前項における摂動の手続きの適用によって導かれた近似解を破綻させる可能性のある永年項の発現を回避するための工夫としての変形座標法 (strained coordinates) をみる。¹²⁾

変形座標法の起源は、19世紀に遡り、Lindstedt, Bohlin, Gylden 等の天文学者の名前が引き合いに出されるごとくである。

いま、Lindstedt の基本アイデアを見るために、微分方程式

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (42)$$

を想定する。このとき、非線型性が体系の振動数を線型の ω_0 から $\omega(\varepsilon)$ に変更するという観察を得た Lindstedt は、かかる振動数の変化を説明すべく $\tau = \omega t$ なる新しい変数を導入し、 ω と u を ε の級数に展開し、

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots \quad (43)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (44)$$

と表現した。このとき、 $\omega_i (i > 1)$ は永年項の発現回避のために選ばれたパラメータである。Poincaré は、Lindstedt が導いた級数展開が漸近性をもつことを証明した。1829年のことであった。

上のアイデアは、様々の形で、物理学、工学における問題の近似解の導出のために用いられてきた。そこでのアイデアは、摂動によって改変される、例えば、振動数 (frequency)、波数 (wave number)、波速度 (wave speed)、固有値 (eigenvalue)、あるいは、エネルギー水準 (energy level) といった問題におけるパラメータを見つけ出し、次いで、そのパラメータのみならず従属変数をも摂動パラメータのべきに展開するそれであった。ここでは、パラメータの摂動は、べき展開が一様に有効となるべく選ばれた。したがって、かかる手法は、変形パラメータ法 (method of strained parameters) と呼ばれる。

かかる一様有効な近似解を得る手法の一般化が、20世紀半ばに Lighthill によってなされた。例えば、 $u(x_1, x_2, \dots; \varepsilon)$ のごとき函数の ε のべき展開において非一様性に遭遇したならば、従属変数 u だけでなく、非一様性を示している独立変数、例えば、 x_1 をも

$$u = \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^m u_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^N) \quad (45)$$

$$x_1 = s + \sum_{m=1}^N \varepsilon^m \xi_m(s, x_2, x_3, \dots, x_n) + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (46)$$

のごとくに新しい独立変数のタームで ε のべきに展開すればよいと主張した。ただし、 $O(\varepsilon^N)$ 、 $O(\varepsilon^{N+1})$ は、高次項である。(46) 式の展開は、 x_1 から s への準恒等変換 (near-identity transformation) とみなし得る。 ξ_m は、変形化函数 (straining function) と呼ばれ、変数 u のための展開が一様有効となるように決定される。もし、 $\xi_m = \omega_m s$ が定数 ω_m に対して成り立つならば、Lighthill の手法は、Lindstedt-Poincaré のそれと一致するが、パラメータよりむしろ座標を変形させるから、変形座標法 (method of strained coordinates) と呼ばれる。

ここで、永年項の発現回避法 (Lindstedt = Poincaré 法と呼んでおく) の本質をみるために、再び、(42) 式

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}) \quad (47)$$

を想起し、もう 1 つの新しい変数

$$\tau = s(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots) \quad (48)$$

を導入する。これを (47) 式に代入すれば

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^{-2} \frac{d^2 u}{ds^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon f \left[u, (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^{-1} \frac{du}{ds} \right] \quad (49)$$

がしたがう。ここで、

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(s) \quad (50)$$

を (49) 式に代入し、同一のべき $\varepsilon^n (n = 0, 1, \dots)$ の係数同志を均等させれば、 u_m の列を決定する方程式が得られる。しかるに、 ω_m が特定の値をとるとき、その限りにおいて永年項の発現が回避さ

れ、他の値に対して、その発現は回避されないことになる。

さて、非減衰非線型振動子を表わす方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (51)$$

を想定し、永年項の発現と、その回避可能性を座標摂動によって確かめることにする。このとき、初期条件

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v > 0 \quad (52)$$

が伴なうものとする。¹³⁾上の方程式を想定する理由は、 $\varepsilon \geq 0$ に対して、そのすべての解が同期性をもつことが期待し得ることに因る。したがって、 x と dx/dt の初期値の如何に関わらず、解は、やがては $x=0$ を通ることになり、(51)式は、自律系 (autonomous) となり $x=0$ 時点を時間の原点として選択することができる。

ここで、

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^3) \quad (53)$$

を仮定しよう。(53)式を(51)式に代入すれば

$$\left(\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 \right) + \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 + x_0^3 \right) \varepsilon + \left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 + x_1^3 \right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) = 0 \quad (54)$$

がしたがう。いま、 $\varepsilon^n (n=0, 1, \dots)$ のベキの係数をゼロに均等させれば、

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 = 0; \quad x_0(0) = 0, \quad \frac{dx_0(0)}{dt} = v \quad (55)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -x_0^3; \quad x_1(0) = \frac{dx_1(0)}{dt} = 0 \quad (56)$$

を得る。

まず、(55)式を解けば、直ちに

$$x_0(t) = v \sin t \quad (57)$$

がしたがう。(57)式を考慮すれば、

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = -v^3 \sin^3 t = \frac{v^3}{4} \sin 3t - \frac{3v^3}{4} \sin t \quad (58)$$

を得る。ただし、 $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ なる関係が用いられた。(58)式の解は、

$$x_1 = -\frac{9}{32} v^3 \sin t - \frac{v^3}{32} \sin 3t + \frac{3v^3}{8} t \cos t \quad (59)$$

で与えられる。(59)式右辺の最終項は、(58)式の $-\left(\frac{3v^3}{4}\right) \sin t$ に対応する。しかるに、 $-\left(\frac{3v^3}{4}\right) \sin t$ は(58)式の同次解となるから、 $t \cos t$ に比例する共振反応を生む永年項となることは、前項で示唆

したごとくである。

ここで、 t に代えて、 τ

$$\tau = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)t \quad (60)$$

を仮定し、変形座標法の適用によって、

$$x(t, \varepsilon) = f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots \quad (61)$$

なる形の解を求めるものとする。 τ の想定は、時間スケールの変更により、遅い時間が導入されたことを意味する。このとき、 ω_i は、 f_i が τ の周期函数とならなければならないという要請の下で決定される未定定数である。

さて、(51), (52) 式を τ のタームで表現し直せば

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (62)$$

$$x(0) = 0 \quad (63)$$

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots) \frac{dx(0)}{d\tau} = v \quad (64)$$

と書くことができる。ここで、(61) 式を (62), (64) 式に代入すれば、 f_i に関する初期値問題の列

$$\frac{d^2f_0}{d\tau^2} + f_0 = 0; \quad f_0(0) = 0, \quad \frac{df_0}{d\tau} = v \quad (65)$$

$$\frac{d^2f_1}{d\tau^2} + f_1 = -2\omega_1 \frac{d^2f_0}{d\tau^2} - f_0^3; \quad f_1(0) = 0, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau} = -\omega_1 v \quad (66)$$

$$\frac{d^2f_2}{d\tau^2} + f_2 = -(\omega_1^2 + 2\omega_2)f_0 - 2\omega_1 \frac{d^2f_1}{d\tau^2} - 3f_0^2 f_1; \quad f_2(0) = 0, \quad \frac{df_2(0)}{d\tau} = (\omega_1^2 - \omega_2)v \quad (67)$$

⋮

がしたがう。

まず、(65) 式を解けば、直ちに

$$f(\tau) = v \sin \tau \quad (68)$$

がしたがう、これを (66) 式に適用すれば

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = (2\omega_1 v - \frac{3}{4}v^3) \sin \tau + \frac{v^3}{4} \sin 3\tau \quad (69)$$

がしたがう。しかるに、(69) 式右辺の第 1 項のごとき $d^2x_1/d\tau^2 + x_1 = 0$ の同次解は、 $t \rightarrow \infty$ につれ非有界となり非周期的となる共振反応を生む永年項を含んだものとなる。したがって、 f_1 の周期性を保証するためには、

$$2\omega_1 v - \frac{3}{4}v^3 = 0 \quad (70)$$

と設定されなければならない。 $v \neq 0$ であるから、(70)式は

$$\omega_1 = \frac{3}{8}v^2 \quad (71)$$

が満たされるときに限って成立し得る。したがって、適切な初期条件の下で、(69)式の残部は、

$$f_1(\tau) = -\frac{9}{32}v^3 \sin \tau - \frac{v^3}{32} \sin 3\tau \quad (72)$$

の形の周期解を与える。

最後に、上の手続きは、 $\varepsilon < 0$ に対しても $|\varepsilon| \ll 1$ である限り妥当する。すべての解が $v = O(1)$ に対して周期性をもつからである。

- 1) Samuelson = Hicks 離散型乗数-加速度因子モデルにつき、Hicks [6], Samuelson [15] 参照。また、その連続化は、Phillips [13] による。
- 2) Kaldor [8], Goodwin [3], [4], [5] 参照。
- 3) かかる近似化は、Puu [14] の示唆に負う。
- 4) Rayleigh 方程式について、例えば、Kevorkian = Cole [9] (Chap. 3), Jordan = Smith [7] (Chap. 4 & 6) 参照。Rayleigh 方程式と van der Pol 方程式との関係について、Kevorkian = Cole, *op.cit.*, (Chap. 3, Sec. 3.1.2) 参照。
- 5) 特異摂動法 (singular perturbation) について、例えば、Vidyasagar [16] (Chap. 4 & 5), Nayfeh [12] (Chap. 3), Kevorkian = Cole, *op.cit.*, (Chap. 1 & 2), Jordan = Smith, *op.cit.*, (Chap. 6), McLachlan [11] (Chap. 4) 参照。
- 6) かかる例解は、Jordan = Smith, *op.cit.*, (Chap. 6, Sec. 6.1) に負う。
- 7) 本図は、Jordan = Smith, *op.cit.*, (Chap. 6) Figure 6.1 に準ずる。
- 8) かかる例解は、Jordan = Smith, *op.cit.*, (Chap. 6, Sec. 6.4) に負う。
- 9) Vidyasagar, *op.cit.*, (Chap. 4, Sec. 4.3) 参照。
- 10) かかる例解は、Vidyasagar, *op.cit.*, (Chap. 2, Sec. 2.5) に準ずる。
- 11) 同次解は、例えば、 $\sin t, \cos t$ に比例する項に相当する。
- 12) 変形座標法 (strained coordinates) について、Kevorkian = Cole, *op.cit.*, (Chap. 3), Nayfeh, *op.cit.*, (Chap. 2, 3 & 4), Jordan = Smith, *op.cit.*, (Chap. 6) 参照。
- 13) (50)式は、前項における(20)式と、同型であるが、初期条件が相異なることに注意されたい。

第2節 非線型経済と近似解

1. 伝統的経済と近似解

本節では、非線型投資函数をもつ経済において乗数-加速度因子モデルが導く解方程式の近似解のあり方をみる。

本項では、伝統的経済における近似解のあり方を変形座標法によって確かめる。

すでに示唆したごとく、非線型投資函数をもつ伝統的経済において、乗数-加速度因子モデルが導く解方程式の Taylor 級数の切り捨てによる截切形は、Rayleigh 方程式に酷似している。そこで、

まず、対比のために、Rayleigh 方程式が導く近似解のあり方をみておこう。

Rayleigh 方程式は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varepsilon \left[\frac{1}{3} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 - \frac{dx}{dt} \right] = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (73)$$

で与えられる。¹⁴⁾ 同方程式は、 $dx/dt=0$ の初期条件の下で、特定の初期値 $x(0)$ に対応するリミット・サイクル (limit cycle) を成す唯一の周期解をもつことで知られている。ここでは、リミット・サイクルの存在に厳密は証明を与える作業の代わりに位相図による発見的 (heuristic) な推論を展開するそれを試みよう。

いま、 x と dx/dt の位相図において、 $\varepsilon=0$ とすると、解曲線は円を成す。任意の $\varepsilon(>0)$ に対しては、振動子は、 $\varepsilon \left[dx/dt - \frac{1}{3}(dx/dt)^3 \right]$ の強制力の影響を受ける。しかるに、 dx/dt が小さい、すなわち、運動が位相図の原点近傍からスタートするならば、 dx/dt は $-\frac{1}{3}(dx/dt)^3$ よりも影響力は大きくなるから、[] 内は差し引き負の減衰の純効果を生み振幅の拡大をもたらす。しかし、かかる状況は無限に持続することにはならず、やがては、 $-\frac{1}{3}(dx/dt)^3$ の項が支配的となり、振幅は縮小化に向かうであろう。

同様に、運動が大きな $dx/dt=v$ からスタートすれば、上の [] の相反する力関係のバランスが反転するまで、振幅は縮小に向かうであろう。したがって、ある特定の初期条件に対して、位相図に閉軌道 (closed trajectory)、すなわち周期解が存在すると推断を下すことができるであろう。(図-4参照。)

さて、かかる解の推論を確かめるために変形座標法を適用しよう。

初期振幅値は未知であるから、初期条件

$$x(0) = a(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 \quad (74)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0 \quad (75)$$

を仮定しよう。ここで、 a_i は未定定数である。周期解は常に $dx/dt=0$ を通過することに注意し、その時点を時間スケールの原点と設定する。

いま、遅い時間

$$\tau = (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) t \quad (76)$$

を導入すれば、 $x(t, \varepsilon)$ は

$$x(t, \varepsilon) = f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots \quad (77)$$

の形に展開される。ここで、(77) 式を (73) 式に代入し、整理すれば、

$$\frac{d^2 [f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots]}{d\tau^2} + \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{d [f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots]}{d\tau} \right] - \frac{d [f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots]}{d\tau} \right\} \varepsilon + [f_0(\tau) + \varepsilon f_1(\tau) + \varepsilon^2 f_2(\tau) + \dots] = 0 \quad (78)$$

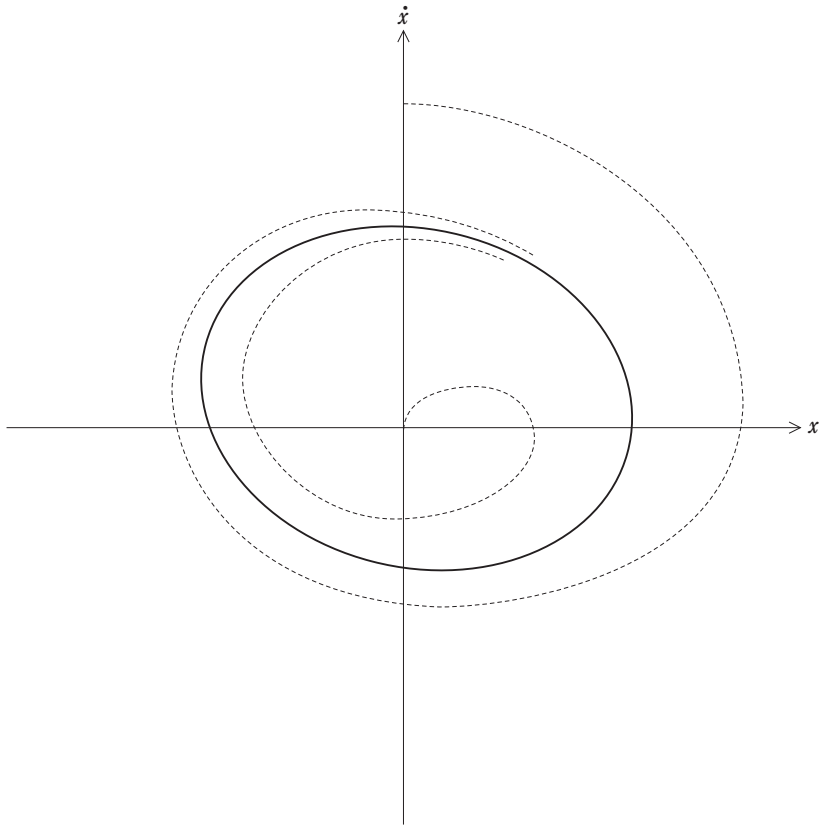


図-4

がしたがう。このとき、個々の f_i を支配する方程式と初期条件は、摂動パラメータ $\varepsilon^n (n=0, 1, \dots)$ の各々の係数をゼロに均等化することによって得られる。

まず、 $\varepsilon^0=1$ に対する係数をゼロと置けば

$$\frac{d^2 f_0}{d\tau^2} + f_0 = 0, \quad f_0(0) = a_0, \quad \frac{df_0(0)}{d\tau} = 0 \quad (79)$$

がしたがう。

次に、 $\varepsilon^1=\varepsilon$ に対して、

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + f_1 = -2\omega_1 \frac{d^2 f_0}{d\tau^2} + \frac{df_0}{d\tau} - \frac{1}{3} \left(\frac{df_0}{d\tau} \right)^3, \quad f_1(0) = a_1, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau} = 0 \quad (80)$$

がしたがう。以下、同様の議論を適用すれば

$$\frac{d^2 f_2}{d\tau^2} + f_2 = -2\omega_1 \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} - 2(2\omega_2 + \omega_1^2) \frac{d^2 f_0}{d\tau^2} + \frac{df_1}{d\tau} + \omega_1 \frac{df_0}{d\tau}$$

$$-\left(\frac{df_0}{d\tau}\right)^2 \left[\frac{df_1}{d\tau} + \omega_1 \frac{df_0}{d\tau} \right], \quad f_2(0) = a_2, \quad \frac{df_2(0)}{d\tau} = 0 \quad (81)$$

⋮

がしたがう。

しかるに、(79)式から、直ちに、

$$f_0(\tau) = a_0 \cos \tau \quad (82)$$

がしたがうから、これを(80)式に適用すれば

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + f_1 = 2\omega_2 a_0 \cos \tau + \left(\frac{a_0^3}{4} - a_0 \right) \sin \tau - \frac{a_0^3}{12} \sin 3\tau \quad (83)$$

がしたがう。しかるに、(83)式右辺の第1, 第2項のごとき同次解は $t \rightarrow \infty$ のとき非有界となり、周期性を損なう反応を示す永年項を成すことになるから、 f_1 の周期性を保証するためには

$$2\omega_2 a_0 = 0 \quad (84)$$

$$\frac{a_0^3}{4} - a_0 = 0 \quad (85)$$

が満たされることが要請される。

ここで、自明解 $a_0 = 0$ を無視し、

$$\omega_1 = 0 \quad (86)$$

$$a_2 = 2 \quad (87)$$

と設定すれば、(83)式の右辺は $-\frac{2}{3} \sin 3\tau$ のみが残るだけとなり、 f_1 は

$$f_1(\tau) = -\frac{1}{4} \sin \tau + a_1 \cos \tau + \frac{1}{12} \sin 3\tau \quad (88)$$

で与えられる。上で導かれた計算結果を想起すれば、(81)式は、

$$\frac{d^2 f_2}{d\tau^2} + f_2 = \left(4\omega_2 + \frac{1}{4} \right) \cos \tau + 2a_1 \sin \tau - \frac{1}{2} \cos 3\tau - a_1 \sin 3\tau + \frac{1}{4} \cos 5\tau \quad (89)$$

と表わされ、再び、 f_2 が周期性を維持するためには

$$a_1 = 0 \quad (90)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{16} \quad (91)$$

と設定されなければならないごとくである。

最後に、かかる変形座標の適用可能性のための基本仮定は、完全解がすべての次元で、1つだけの変形座標に依存するということである。かかる要請は、周期解に対しては妥当する。周期解の成立を見込んで変形座標法を適用する理由はここにある。

さて、上の Rayleigh 方程式の例解と対比しながら、非線型投資函数をもつ伝統的経済において乗数-加速度因子モデルが導く解方程式の近似解のあり方をみる。ただし、記号法が変更されていることに注意されたい。

再び、截切 Taylor 級数を成す解方程式

$$\ddot{Y} + Y = a\dot{Y} - b\dot{Y}^3, \quad Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = 1 \quad (92)$$

を想起しよう。ただし、 $a = \sqrt{s(v-s-1)}$ 、 $b = \sqrt{s^3}/3$ である。

その前に、上の Taylor 級数が適用される以前の解方程式

$$\ddot{Y} + (1+s)\dot{Y} - v \tanh \dot{Y} + sY = 0 \quad (93)$$

が描く $Y-\dot{Y}$ 空間における位相図をスケッチしておこう。大きな $|Y|$ ないし $|\dot{Y}|$ に対して体系は減衰する。 $v > (1+s)$ のとき、負の減衰を示す原点の近傍が存在し、逆に、 $v < (1+s)$ のとき、正の減衰ゾーンが平面全体に拡がる。特に、前者の場合で、中心が負の減衰、周辺が減衰をなす組合せが生ずるときリミット・サイクルの存在が示唆されてくる。図-4と同様の位相図がしたがう。

さて、(92)式の表現は、3次減衰振動子(cubic damping oscillator)の運動に比定される。このとき、循環運動を示す速い時間(fast time)とリミット・サイクルに漸近していくようなトレンドを示す遅い時間(slow time)の2つの時間変数の形に時間スケールが変更される。速い時間 t に対し、遅い時間 τ は

$$\tau = at \quad (94)$$

で表わされるものとする。このとき、解 Y は、

$$Y = Y^0(\tau, t) + aY^1(\tau, t) + a^2Y^2(\tau, t) \quad (95)$$

の形の漸近展開をもつものとする。

まず、 Y の時間 t に関する導関数 dY/dt 、 d^2Y/dt^2 は、連続函数に関する Young 定理(Young's theorem)を想起すれば、それぞれ

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y^0}{\partial t} + a \frac{\partial Y^0}{\partial \tau} + a \frac{\partial Y^1}{\partial t} + a^2 \frac{\partial Y^1}{\partial \tau} + a^2 \frac{\partial Y^2}{\partial t} \quad (96)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial^2 Y^0}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial^2 Y^0}{\partial t \partial \tau} + a^2 \frac{\partial^2 Y^0}{\partial \tau^2} + a \frac{\partial^2 Y^1}{\partial t^2} + 2a^2 \frac{\partial^2 Y^1}{\partial \tau \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 Y^2}{\partial \tau^2} \quad (97)$$

で表わされる。(95),(96),(97)式を(92)式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}^0 + 2aY_{t\tau}^0 + a^2Y_{\tau\tau}^0 + a\dot{Y}^1 + 2a^2Y_{t\tau}^1 + a^2\ddot{Y}^2 + Y_0 + aY^1 + a^2Y^2 \\ & - a(Y_t^0 + aY_\tau^0 + aY_t^1 + a^2Y_{\tau\tau}^1 + a^2\dot{Y}^2) \\ & + b[(Y_t^0)^3 + a(Y_\tau^0)^3 + a(Y_t^1)^3 + a^2(Y_{\tau\tau}^1)^3 + a^2(\dot{Y}^2)^3] = 0 \end{aligned} \quad (98)$$

を得る。ただし、 $Y_t^n = \partial Y^n / \partial t$ 、 $Y_\tau^n = \partial Y^n / \partial \tau$ 、 $Y_{t\tau}^n = \partial^2 Y^n / \partial t \partial \tau$ ($n=0, 1, 2$) である。

まず、 $a^0=1$ の場合の係数をゼロに設定すれば

$$\ddot{Y}^0 + Y^0 = 1 \quad (99)$$

がしたがう。次に $a^1 = a$ の場合について

$$a\ddot{Y}^1 + 2aY_{tr}^0 + aY^1 - aY_t^0 + ab(Y_t^0)^3 = 0 \quad (100)$$

$$\text{or } \ddot{Y}^1 + Y^1 = -2Y_{tr}^0 + Y_t^0 - b(Y_t^0)^3 \quad (101)$$

がしたがう。

ところで、(99)式の解は、直ちに

$$Y^0 = A(\tau)\cos t + B(\tau)\sin t \quad (102)$$

で与えられる。このとき、 $A(\tau), B(\tau)$ の表現には、 A, B が遅い時間 τ に依存するという仮定が込められている。

ここで、(102)式を(101)式に代入し、三角関数に関する恒等式

$$\sin^3 t = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t \quad (103)$$

$$\sin^2 t \cos t = \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t \quad (104)$$

$$\sin t \cos^2 t = \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin 3t \quad (105)$$

$$\cos^3 t = \frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t \quad (106)$$

を想起すれば、(101)式の右辺の各項は

$$Y_t^0 = -(A\sin t - B\cos t) \quad (107)$$

$$-2Y_{tr}^0 = 2(A'\sin t - B'\cos t) \quad (108)$$

$$\begin{aligned} -b(Y_t^0)^3 &= b[A^3\sin^3 t - B^3\cos^3 t + 3A^2B\sin^2 t + \cos t - 3AB^2\sin t \cos^2 t] \\ &= b\left[A^3\left(\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t\right) - B^3\left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t\right) \right. \\ &\quad \left. - 3A^2B\left(\frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t\right) + 3AB^2\left(\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin 3t\right)\right] \\ &= b\left[\frac{3}{4}A(A^2+B^2)\sin t - \frac{3}{4}B(A^2+B^2)\cos t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}A(A^2-3B^2)\sin 3t - \frac{1}{4}B(B^2-3A^2)\cos 3t\right] \end{aligned} \quad (109)$$

で表わされる。したがって、

$$\begin{aligned}
Y &= \ddot{Y}^1 + Y^1 \\
&= \frac{1}{a} \left[2A' \sin t - 2B' \cos t - aA \sin t + aB \cos t \right. \\
&\quad \left. + \frac{3b}{4} A (A^2 + B^2) \sin t - \frac{3b}{4} B (A^2 + B^2) \cos t \right. \\
&\quad \left. - \frac{b}{4} A (A^2 - 3B^2) \sin 3t - \frac{b}{4} B (B^2 - 3A^2) \cos 3t \right] \\
&= \left(2A' + \frac{3}{4} \frac{b}{a} A (A^2 + B^2) - A \right) \sin t - \left(2B' + \frac{3}{4} \frac{b}{a} B (A^2 + B^2) - B \right) \cos t \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{b}{a} A (A^2 - 3B^2) \sin 3t - \frac{1}{4} \frac{b}{a} B (B^2 - 3A^2) \cos 3t \tag{110}
\end{aligned}$$

がしたがう。

しかるに、(110)式において、 $\sin t, \cos t$ 項は、 $t \cos t, t \sin t$ タイプの永年項を生じさせ、級数展開の一般性が失われていく。したがって、永年項を除去するためには、

$$2A' + \frac{3}{4} \frac{b}{a} A (A^2 + B^2) - A = 0 \tag{111}$$

$$2B' + \frac{3}{4} \frac{b}{a} B (A^2 + B^2) - B = 0 \tag{112}$$

がしたがうことが要請される。

ここで、極座標を用いて

$$A = \rho \cos \phi \tag{113}$$

$$B = \rho \sin \phi \tag{114}$$

と変形することによって、遅い変化の振幅 $\rho(\tau)$ と位相 $\phi(\tau)$ を導入する。直ちに、(113),(114)式は、それぞれ

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \frac{3}{8} \rho^3 - \frac{1}{2} \rho = 0 \tag{115}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \tag{116}$$

と変形される。初期条件を $\rho(0) = 1, \phi(0) = 0$ と設定し、(115),(116)式を積分すれば、

$$A = \rho = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - c^2/c_0^2) e^{-at}}} \tag{117}$$

$$B = \phi = c \tag{118}$$

がしたがう。¹⁵⁾ ただし、 $c = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{a}{b}}$ で、リミット・サイクルの振幅を表わし、 c_0 は任意の初期値を表

わす。したがって、(102)式に適用すれば、

$$Y^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - (1 - c^2/c_0^2)} e^{-at}} \cos(t - \phi) \quad (119)$$

がしたがう。(119)式は、一次近似として、リミット・サイクル $Y^0 = c \cos(t - \phi)$ への一様な接近が存在することを示唆している。

2. 空間経済と近似解

本項では、非線型投資函数をもつ伝統的経済を空間的に拡張された市場を通じて2つの地域が交易を展開する2次元空間経済へ発展化させる。¹⁶⁾

いま、2つの地域が立地する空間座標を $x = (x_1, x_2)$ とし、両者間の交易は、空間座標に関する2次導函数で表わされる所得差に依存するものとする。 X を純輸出超過とすれば、 X は、両地域に共通する輸入性向 m の下で、 $X = md^2Y(x_1, x_2)/dx^2$ で表わされる。

スカラー函数である所得 $Y(x_1, x_2)$ の x_1 - x_2 座標における勾配 (gradient) は、ベクトル函数

$$\text{grad} Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}, \frac{\partial Y}{\partial x_2} \right) = (Y_1, Y_2) \quad (120)$$

で表わされ、発散 (divergence) は、スカラー函数

$$\text{div} Y = \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} \quad (121)$$

で表われる。しかるに、 $\text{grad} Y$ の発散は、

$$\text{div}(\text{grad} Y) = \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x_2^2} = \nabla^2 Y \quad (122)$$

を導く。最右辺の表現は、Laplace 方程式 (Laplacian) と呼ばれる。Gauss 定理 (Gauss's theorem) を援用すれば、Laplace 方程式 $\nabla^2 Y$ は空間的所得差の尺度を与える。¹⁷⁾

さて、純輸出超過 $m\nabla^2 Y$ が導入されると、乗数-加速度因子モデルが導いた解方程式 ((120) 式) は

$$\ddot{Y} + (1 + s - v)\dot{Y} + sY - m\nabla^2 Y = 0 \quad (123)$$

と書き改められる。このとき、非線型投資函数を $\tanh \dot{Y}$ で近似させるとき、(123)式は、投資性向 v の下で、

$$\ddot{Y} + (1 + s)\dot{Y} - v \tanh \dot{Y} + sY - m\nabla^2 Y = 0 \quad (124)$$

と書き直される。

さて、極座標を用いて、半径を $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とし、偏角を θ とすれば、Laplace 方程式は、

$$\nabla^2 Y = \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x_2^2}$$

$$= \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial Y}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Theta^2} \quad (125)$$

と変形される。ここで、簡単化のために、(125)式最右辺は $\left(\frac{1}{r^2}\right) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Theta^2} = 0$ 、すなわち、 Y の振動は角度 Θ には依存しないものと仮定しよう。したがって、(125)式は、

$$\nabla^2 Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial Y}{\partial r} \quad (126)$$

と単純化される。これを(124)式に代入すれば

$$\ddot{Y} + (1+s)\dot{Y} - v \tanh \dot{Y} + sY - m \left[\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial Y}{\partial r} \right] = 0 \quad (127)$$

を得る。さらに、(127)式は、

$$\ddot{Y} + sY - m \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} = -(1+s)\dot{Y} + v \tanh \dot{Y} - m \left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial Y}{\partial r} \quad (128)$$

と変形される。しかるに、(128)式の左辺をゼロに均等化させる、すなわち

$$\ddot{Y} + sY - m \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} = 0 \quad (129)$$

とすれば、(129)式は、Klein = Gordon 方程式 (Klein = Gordon equation) を与える。同方程式は、発散波 (disperse wave) の拡散運動の展開には有益なそれであり、一般に、発散波は、振幅 A 、周期 ω 、波数 k に対し $Ae^{ikr-i\omega t}$ なる周期的な正弦状波列 (sinusoidal wavetrains) の形の基本解 (elementary solutions) をもつ波として知られている。¹⁹⁾

いま、 $A=1$ とし、基本解として $e^{i\omega t-ikt}$ を Klein = Gordon 方程式に適用すれば、

$$-\omega^2 (e^{i\omega t-ikr}) + s (e^{i\omega t-ikr}) + mk^2 (e^{i\omega t-ikr}) = 0 \quad (130)$$

$$\text{or } -\omega^2 + s + mk^2 = 0 \quad (131)$$

$$\text{or } \omega^2 = mk^2 + s \quad (132)$$

がしたがう。(132)式の関係は、発散波の発散関係 (dispersive relation) と呼ばれる。

もし、 $m=s=0.5$ 、 $v=2$ と数値設定すれば、発散関係は、 $\omega=1$ に対して $k=1$ を許すことになる。

さて、所得 Y の解を $Y(\theta)$ で表わそう。ただし、 $\theta=t-r$ である。 Y の θ に関する導関数をそれぞれ Y', Y'' と表わせば

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{d\theta} = Y' \quad (133)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{d^2 Y}{d\theta^2} = Y'' \quad (134)$$

$$\frac{dY}{dr} = \frac{dY}{d\theta} = Y' \quad (135)$$

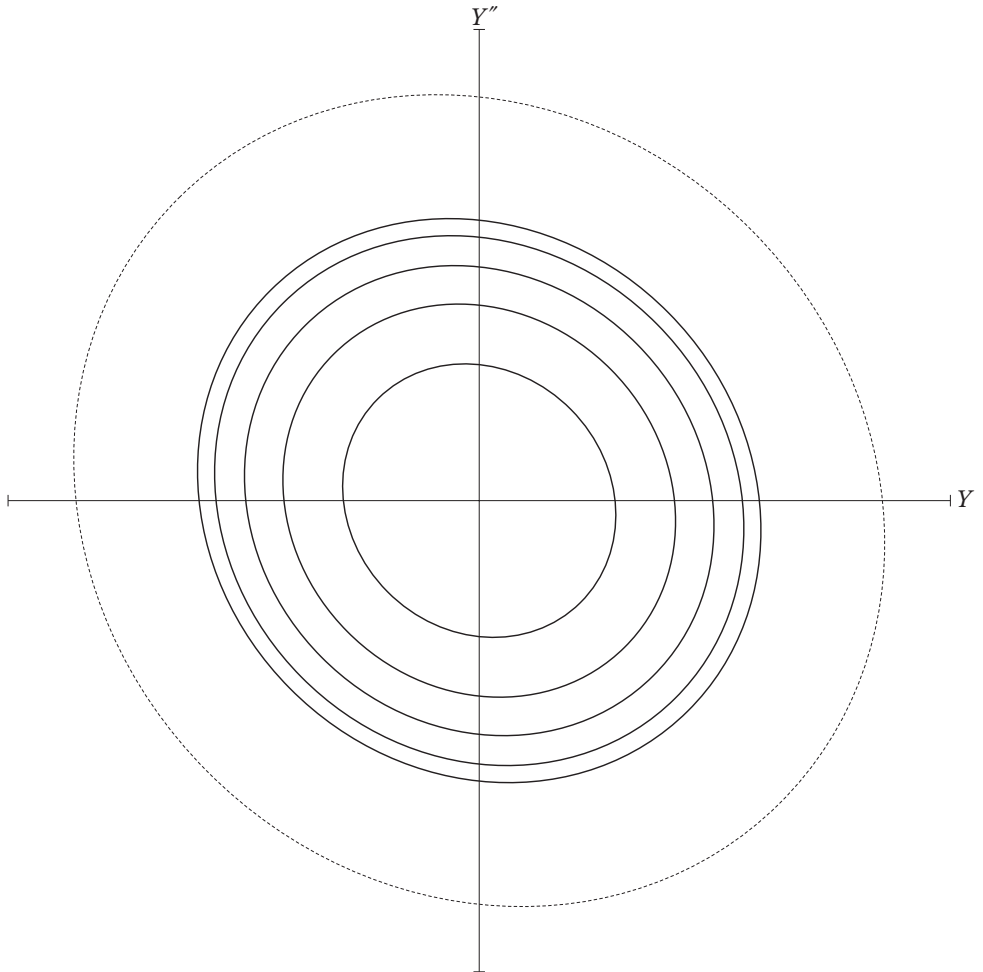


図-5

$$\frac{d^2Y}{dr^2} = \frac{d^2Y}{d\theta^2} = Y'' \quad (136)$$

がしたがう。(133)-(136)式を(128)式に代入すれば

$$Y'' + (1+s)Y' - v \tanh Y' + sY - m \left(Y'' + \left(\frac{1}{r} \right) Y' \right) = 0 \quad (137)$$

を得る。再び、 $m=s=0.5$, $v=2$ と設定すれば、(137)式は

$$Y'' + Y = 4 \tanh Y' - \left(3 + \left(\frac{1}{r} \right) \right) Y' \quad (138)$$

と書き改められる。

ところで、(138)式は、半径 r に対する空間的依存性を除けば、前節の(16)式と同じである。 r

の値毎のリミット・サイクルを描けば、**図-5**がしたがう²⁰⁾。1より小さい r に対して、体系は減衰し、リミット・サイクルは発生しない、逆に、半径が1より大きくなると、まず有限で振幅が拡大していくリミット・サイクルが生じ、最も外側のそれは、無限の半径に対応するものとなる。振幅は、 x_1-x_2 空間の原点からの距離とともに拡大するが、周期は、同一のままであるごとくである。²¹⁾

いま、 $\tanh Y'$ を $Y' - \frac{Y'^3}{3}$ で近似すれば、(138)式は

$$Y'' + Y = \left(1 - \frac{1}{r}\right) Y' - \frac{4}{3} Y'^3 \quad (139)$$

と書き改められる。前節で用いられた手続きを、再び適用すれば、

$$Y^0 = \frac{1 - \frac{1}{r}}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 / c_0^2\right) e^{(1 - \frac{1}{r})(r-t)}}} \cos(r-t) \quad (140)$$

を得る。²²⁾

(140)式は、リミット・サイクルの振幅が r とともに拡大し、 r が少くとも1であるならば、体系は、リミット・サイクルに接近するが、他の r に対しては減衰機能が働かず、 r が臨界値1に近いとき、リミット・サイクルへの接近は、極めて緩慢なものとなることを示唆している。

さらに、一次近似として、リミット・サイクルへの漸近解は

$$Y^0 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cos(r-t) \quad (141)$$

で与えられる。

- 14) 以下の展開の手続きは、Kevorkian = Cole, *op.cit.*, (Chap. 3, Sec. 3.1.2) に準ずる。
- 15) Puu, *op.cit.*, (Sec. 4) 参照。
- 16) 以下の交易の導入は、Beckmann = Puu [2] (Chap. 8) に負う。
- 17) Gauss 定理について、Kreyszig [10] (Chap. 10, Sec. 10.7), Аминов (Aminov) [1] (Глава 11) 参照。後者は、有益な図形に富む好著。
- 18) Klein = Gordon 方程式について、Nayfeh, *op.cit.*, (Chap. 5, Sec. 5.8.3), Whitham [17] (Chap. 11, Sec. 11.1, および, Chap. 14, Sec. 14.1) 参照。
- 19) Whitham, *op.cit.*, (Chap. 11, Sec. 11.1) 参照。
- 20) Puu, *op.cit.*, (Sec. 6) Fig. 3 に準ずる。ただし、座標目盛省略。
- 21) Jordan = Smith, *op.cit.*, (Chap. 4, Sec. 4.2) は、極座標における振幅と振動数を測定する手続きを提示している。
- 22) Puu, *op.cit.*, (Sec. 6) 参照。

結びにかえて

宇宙空間において、基本的運動法則が正確に与えられていても、特定の位置関係にある3つ以上の天体の速さを計算することは不可能である。天文学上有名な3体問題(problem of three bodies)

である。3体問題において、質量 m_2, m_3 が質量 m_1 に比べて非常に小さい場合、例えば、第3体の運動を論ずるとき、初めに $m_2=0$ として、 m_1 と m_3 とだけの2体問題を解き、次に、 m_2 の影響を入れた場合の解の偏差を求める方法が取られてきた。この偏差を求める方法こそが摂動 (perturbation) である。

さらに、解の中に代数項と三角函数項の積が存在する場合、その項は共振現象を生む可能性をもち永年項 (secular term) と名づけられた。命名の由来は、世紀を意味するフランス語 siècle に在る。極く小さな ε に対し、 $\varepsilon t \cos t$ に比例する項の影響が世紀単位の長期間を経て初めて感知されるものであるからである。

正確な分析が不可能なものが存在するならば、分析できるものだけを加法的な重ね合わせ (superposition) によって作り上げた線型モデルに摂動を加えることによって除外された部分を説明することが可能であるとする摂動法が意味を持つてくる。

上では、かかる摂動法が作用する中で、乗数-加速度因子モデルの2つの特性が明らかにされた。1つは、解の周期性であり、もう1つは、モデルの非線型化、さらには、空間的文脈への拡散化による体系の動学を危うくする傾向性の除去可能性である。

地域間交易が展開する空間経済の非線型化は、我々の議論の興味深い発展化の一つの方向であろう。

References

- [1] Ю. А. Аминов (Y. A. Aminov), *Геометрия Векторного Поля (Geometry of Vector Field)*, URSS, Москва, 2019.
- [2] M. Beckmann and T. Puu, *Spatial Economics, Density, Potential, and Flow*, North Holland, 1985.
- [3] R. M. Goodwin, "A Non-linear Theory of the Cycle," *Review of Economics and Statistics*, 32, 1950.
- [4] _____, "The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles," *Econometrica*, 29, 1951.
- [5] _____, "Non-Linear Dynamics and Economic Evolution," in N. Thygesen, K. Velupillai, and S. Zambell (eds.), *Business Cycles: Theories, Evidence and Analysis*, New York University Press, 1991.
- [6] J. R. Hicks, *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford University Press, 1950.
- [7] D. W. Jordan and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Fourth edition, Oxford University Press, 2007.
- [8] N. Kaldor, "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal*, 50, 1940.
- [9] J. Kevorkian and J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, 1980.
- [10] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th edition, John Wiley and Sons, 2006.
- [11] N. W. McLachlan, *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences*, Oxford at the Clarendon Press, 1956.
- [12] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley and Sons, 1973.
- [13] A. W. Phillips, "Stabilization Policy in a Closed Economy," *Economic Journal*, 64, 1954.
- [14] T. Puu, "Multiplier-Accelerator Models Revisited," *Regional Science and Urban Economics*, 16, 1986.
- [15] P. A. Samuelson, "Interactions between the Multiplier Theory and the Principle of Acceleration," *Review of Economics and Statistics*, 21, 1939.
- [16] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, 1978.
- [17] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons, 1974.