

ファジィ測度とファジィ積分モデルによる総合評価法

Fuzzy Measures and Fuzzy Integral Models

高萩栄一郎*
Eiichiro TAKAHAGI

概要:

応用のためのファジィ測度・ファジィ積分モデルを概説する。第2節では、ファジィ測度を定義し、各制約の意義を述べ、非単調ファジィ測度、特性関数との相違、メビウス反転値、2 加法的ファジィ測度について説明をする。第3節では、ファジィ積分として、菅野積分、シヨケ積分、シボツシュ積分の定義を示し、利用上の注意を述べる。第4節では、拡張や他の評価法との関係について考察し、OWA オペレータ、集計関数、ファジィ論理関数、ファジィルールによるシヨケ積分型評価、双容量に関するシヨケ積分、累積プロスペクト理論との関係を概説する。第5節では、ファジィ測度の同定方法について考察し、回帰分析のようなデータからの同定、 λ ファジィ測度による同定、ダイヤモンド型一対比較について述べる。

1 はじめに

ファジィ測度とファジィ積分モデルは、一般に言われるファジィ理論とは少し違ったモデルである。ファジィ積分モデルでは、評価項目間の相互作用をファジィ測度で表現し、総合評価をしようとするモデルである。 $[0, 1]$ 区間の値を扱うことが多いので、「ファジィ」という名称がついたと考えられる。または、ファジィの研究者がこの分野を開拓したからとも考えられる [1]。「ファジィ」が付かない名称として、ファジィ測度は、非加法的測度とか容量とも呼ばれている。

また、測度とか積分という名称も難しいイメージがある。評価対象の集合を有限集合に限れば、加重和や最大値、最小値での評価を拡張し、評価項目間の相互作用を扱えるようにしたものである。集計関数やファジィ総合評価法の一つとも考えられる。

本稿では、評価対象の集合を有限集合に限り、応用するときに必要なモデルの考え方を、例題を使って説明していきたい。

ファジィ測度・ファジィ積分モデルは、図1に示すように、 n 個の入力値 x_1, \dots, x_n をファジィ測度を使って、総合評価値を出力するモデルである。ファジィ測度は、評価方法としてのパラメータとして与えられる。

* 専修大学 (Senshu University)
受理: 2010 年 5 月 21 日

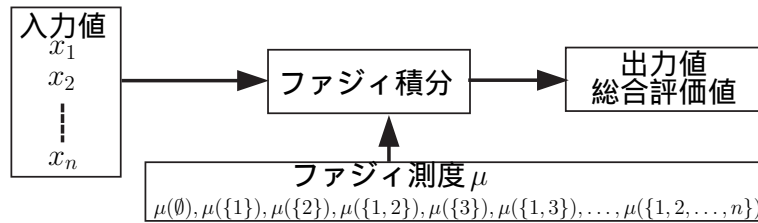


図 1: ファジィ測度・ファジィ積分モデルの図解

2 ファジィ測度

2.1 定義

ファジィ測度 (Fuzzy Measure)[1] は、容量 (Capacity) とも呼ばれており、さまざまな制約がついた集合関数として表現される。評価基準の集合を X で表す。本稿では、 X は有限集合に限定し、その要素数は n 個とする。また、要素は、1 から n までの番号で表す。すなわち、 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。 X は、総合評価を行うときは評価基準の集合であり、さまざまな評価基準の総合出力の場合、 X は、その基準の集合である。

たとえば、ある作業所で、作業員 1,2,3 が一緒に作業をし、生産物などの総合出力を得るとき、作業員を番号で表記し、 $X = \{1, 2, 3\}$ とする。また、中国茶を、香り、味、色、価格の 4 つの評価基準で評価するとき、1,2,3,4 という番号を付け $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

ファジィ測度は、集合関数の一種で、定義域は、全体集合 X のすべての部分集合の集合 (ベキ集合 2^X) である。たとえば、 $X = \{1, 2, 3\}$ のとき、

$$2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad (1)$$

である。

ファジィ測度の値は、ファジィ積分との関係で、単位あたりの効果を表すことが多い。作業員の例でのファジィ測度を μ とすると、 $\mu(\{1\})$ は、作業員 1 の単位あたり (たとえば 1 時間あたりの) の生産量、 $\mu(\{2\})$ は、作業員 2 の単位あたりの生産量となる。定義域は、 X のすべての部分集合であるので、2 人が一緒に作業したときの生産量 $\mu(\{1, 2\})$ を $\mu(\{1\})$ と $\mu(\{2\})$ との和とは別個に与えることができる。この 2 人がうまく協力できれば、単独での単位あたりの生産量の和よりも多くの量を単位あたりに生産でき、 $\mu(\{1, 2\}) (> \mu(\{1\}) + \mu(\{2\}))$ として表現できる。したがって、2 人の作業の相互作用を表現することができる。

一般に $X = \{1, \dots, n\}$ 上のファジィ測度 μ は、次のように定義されている。

$$\mu : 2^X \rightarrow [0, 1] \quad (2)$$

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (3)$$

$$\mu(X) = 1 \quad (4)$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) \text{ if } A \subseteq B, \forall A, B \in 2^X \quad (5)$$

[0, 1] のファジィ測度値 式 (2) は、ファジィ測度の値を [0, 1] 区間の値に制限している。これは、ファジィ理論で [0, 1] の値を扱うためのものである。この制約は、主に、総合評価を行うときな

ど、広義の平均値を求めるときに課せられる。この制約を課すと、ファジィ積分の出力値は、入力値の最大値と最小値の間の値となる。

下記の正規性などを課さないときは、式(2)は、 $\mu: 2^X \rightarrow R^+$ のように値域を正の実数全体、さらに、下記の単調性制約を課さず、負のファジィ測度値を認めるときは、実数全体 $\mu: 2^X \rightarrow R$ とすることもある。

菅野積分を行うときは、max-min 演算を行うため、ファジィ測度、入力値ともに、 $[0, 1]$ の値である必要がある。

空集合に対するゼロ制約 式(3)は、すべての入力値が0のとき ($x_i = 0, i = 1, \dots, n$)、出力値も0とする制約である。また、シヨケ積分を計算をするとき、この制約がないと値が発散する。

正規性 式(4)の制約は、正規性と呼ばれている。これは、 $x_i = 1, i = 1, \dots, n$ の場合、出力値を1にするものである。

単調性 式(5)の制約は、単調性制約と呼ばれている。この制約は、ファジィ積分の計算を行ったとき、各 x_i に対する出力値の単調増加性を保証している。

2.2 ファジィ測度の意味・解釈

ファジィ積分（特にシヨケ積分）は、加重和の拡張として解釈されることが多い。加重和の重み係数 $a_i \geq 0, \forall i$ がファジィ測度に対応していると考える。

2.2.1 作業員の例

作業員1,2がおり、1は時間あたり30kg、2は20kg生産できる。加重和で計算するとき、2人が働いた場合、加法性が仮定され、30+20kg生産できるとされる。ファジィ測度では、加法性が仮定されず、協力等により、50kg以外の場合も考える。たとえば、うまく協力でき、60kg生産できるとしよう。この場合のファジィ測度 μ は、次のようになる。

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{1\}) = 30, \mu(\{2\}) = 20, \mu(\{1, 2\}) = 60 \quad (6)$$

この作業員の例の場合、総合評価や広義の平均演算のためではないので、 $[0, 1]$ 区間のファジィ測度値と正規性の制約は課していない。 $\mu(\emptyset) = 0$ は、だれも作業を行われなければ、生産量は0であることを示している。

単調性制約は、 $n = 2$ の場合、 $\mu(\{1\}) \geq \mu(\emptyset)$ 、 $\mu(\{2\}) \geq \mu(\emptyset)$ 、 $\mu(\{1, 2\}) \geq \mu(\{1\})$ 、 $\mu(\{1, 2\}) \geq \mu(\{2\})$ の4つである。この例の場合、単独で作業をするより、2人で作業をした方が生産量が増えるという仮定である。

また、 $\mu(\{1, 2\}) > \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ という関係になっている。この関係は、加法的な関係 $\mu(\{1, 2\}) = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ を上回っているので「優加法的」と呼ばれている。また、2人が不足しているところを補っているので「補完的」とか「相乗効果」と呼ばれている。

2.2.2 ハンバーガーショップの例

あるハンバーガーショップでは、ハンバーガー 1 個 200 円、コーラ 1 杯 120 円、セット (ハンバーガー 1 個+コーラ 1 杯) を 250 円で販売している。ハンバーガーを 1、コーラを 2 とすると、ファジィ測度 μ は、

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{1\}) = 200, \mu(\{2\}) = 120, \mu(\{1, 2\}) = 250 \quad (7)$$

と表記できる。単調性制約は、何かを追加したとき、価格は下がらないという制約となる。たとえば、ハンバーガー単独より、セットの方が安いということはないという制約である。

$\mu(\{1, 2\}) < \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ という関係は、加法的よりも値が低くなるので、「劣加法的」と呼ばれている。また、「代替的」とか「相殺効果」とも呼ばれている。

2.2.3 成績評価の例

ある入試で、英語 (1) と国語 (2) を課している (おのおの 100 点満点)。国語をやや重視する評価法とする。総合評価値も 100 点満点で出力するので、正規性を仮定する。

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{1\}) = 0.4, \mu(\{2\}) = 0.6, \mu(\{1, 2\}) = 1.0 \quad (8)$$

とすれば、 $\mu(\{1, 2\}) = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ であり、加法的となる。これは、 $0.4x_1 + 0.6x_2$ とした加重平均と同じである。

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{1\}) = 0.2, \mu(\{2\}) = 0.3, \mu(\{1, 2\}) = 1.0 \quad (9)$$

とすると $\mu(\{1, 2\}) > \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ となり、優加法的なファジィ測度である。これは、英語だけでは 0.2 という評価、国語だけでは 0.3 という評価しか与えず、両方できていないと高い評価を与えないという評価法である。したがって、英語と国語は補完的な関係を想定している。

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{1\}) = 0.6, \mu(\{2\}) = 0.9, \mu(\{1, 2\}) = 1.0 \quad (10)$$

とすると $\mu(\{1, 2\}) < \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$ となり、劣加法的なファジィ測度である。英語だけで 0.6、国語だけで 0.9 というどちらか一つだけであれば高い評価を与える評価法であり、代替的な関係にある。

組み合わせによって、優加法的、劣加法的性が混在するファジィ測度を定義することも可能である。英語 (1)、国語 (2)、数学 (3) で、

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0, & \mu(\{1\}) &= 0.3, & \mu(\{2\}) &= 0.3, & \mu(\{3\}) &= 0.6, \\ \mu(\{1, 2\}) &= 0.7, & \mu(\{1, 3\}) &= 0.9, & \mu(\{2, 3\}) &= 0.9, & \mu(\{1, 2, 3\}) &= 1.0 \end{aligned} \quad (11)$$

とできる。国語と英語との間では優加法的であるが、数学と他の科目の間では加法的、3 科目全体では劣加法的としている。

2.3 非単調ファジィ測度

作業員の例で、2人で作業をするより、一人で作業をするほうがはかどる場合もある。たとえば、 $\mu(\{1\}) = 30, \mu(\{1, 2\}) = 25$ の場合、作業員 2 が加わることにより、生産量が減少してしまう場合、すなわち、 $\mu(\{1, 2\}) \not\geq \mu(\{1\})$ の場合も取り扱うためのファジィ測度として非単調ファジィ測度が定義されている。

非単調ファジィ測度 μ^- は、ファジィ測度の制約から式 (5) の単調性制約を除いた集合関数で、正規性なども仮定されないことが多い。

$$\mu^- : 2^X \rightarrow \mathbf{R} \quad (12)$$

$$\mu^-(\emptyset) = 0 \quad (13)$$

2.4 ゲームの理論の特性関数

ファジィ測度は協力ゲームでの特性関数と近い関係にある。プレイヤーの集合を X として、特性関数 ν は、プレイヤーの提携による利得として表され、通常

$$\nu : 2^X \rightarrow \mathbf{R} \quad (14)$$

$$\nu(\emptyset) = 0 \quad (15)$$

$$\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B), \forall A, B \text{ where } A \cap B = \emptyset \quad (16)$$

で定義されている。式 (16) は、ファジィ測度の単調制約より強く、ファジィ測度では優加法的なファジィ測度となっている。

ファジィ測度と特性関数はきわめて近い関係がある。したがって、特性関数の理論を使ったファジィ測度の分析が行われている。たとえば、ファジィ測度の各評価基準 (各 $i \in X$) の重要度の評価にシャプレイ値などが使われている [2]。

協力ゲームの特性関数は、提携による利得を表現しているものであり、一方、ファジィ測度は、ファジィ積分との関係で、組み合わせによる単位あたりの効果を表しているという違いがある。

2.5 ファジィ測度の解釈 – シャプレイ値 –

シャプレイ値は、もともと協力ゲームの理論で、提携によって生まれた利得を各プレイヤーに分配する方法の一つである。ファジィ測度では、各評価基準への重要度の指標として利用されている。特性関数では、優加法性を仮定しているが、ファジィ測度の場合でもそのまま適用している。

ファジィ測度 μ の $i \in X$ のシャプレイ値は

$$sh_i(\mu) := \sum_{S \subseteq X} \gamma_n(S) [\mu(S) - \mu(S \setminus \{i\})] \quad (17)$$

$$\gamma_n(S) := \frac{(n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!} \quad (18)$$

で定義される．ただし， $|S|$ は集合 S の要素数を表す ($n = |X|$) ．式 (11) の例の場合，

$$\begin{aligned} sh_1(\mu) &= \frac{\mu(\{1, 2, 3\}) - \mu(\{2, 3\})}{3} + \frac{\mu(\{1, 2\}) - \mu(\{2\}) + \mu(\{1, 3\}) - \mu(\{3\})}{6} + \frac{\mu(\{1\})}{3} = 0.3 \\ sh_3(\mu) &= \frac{\mu(\{1, 2, 3\}) - \mu(\{1, 2\})}{3} + \frac{\mu(\{1, 3\}) - \mu(\{1\}) + \mu(\{2, 3\}) - \mu(\{2\})}{6} + \frac{\mu(\{3\})}{3} = 0.4 \end{aligned}$$

同様に $sh_2(\mu) = 0.3$ となる．

シャプレイ値の有用性は，入力値 x_1, \dots, x_n を n 次元確率変数と見なし，任意の順列 (i_1, \dots, i_n) に対して， $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_n}$ が等確率で起こるとき， x_{i_i} のシヨケ積分の出力値に対する重みの期待値は，シャプレイ値に等しくなる [2] ことである．

2.6 メビウス反転値 – ファジィ測度の別表現 –

メビウス反転値 [3] は，ファジィ測度と 1 対 1 対応する集合関数で，協力により増大した部分を抜き出したものである．ファジィ測度 μ のメビウス反転値 Δ^μ は，

$$\Delta^\mu(A) := \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B), \forall A \in 2^X \quad (19)$$

で定義され，逆変換は，

$$\mu(A) = \sum_{B \subseteq A} \Delta^\mu(B), \forall A \in 2^X \quad (20)$$

となる． $\Delta^\mu(A)$ が正であれば優加法的，負であれば劣加法的，0 であれば加法的である．式 (11) の例の場合，

$$\begin{aligned} \Delta^\mu(\{1\}) &= \mu(\{1\}) = 0.3, \quad \Delta^\mu(\{2\}) = \mu(\{2\}) = 0.3, \quad \Delta^\mu(\{3\}) = \mu(\{3\}) = 0.6, \\ \Delta^\mu(\{1, 2\}) &= \mu(\{1, 2\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{2\}) = 0.1, \\ \Delta^\mu(\{1, 3\}) &= \mu(\{1, 3\}) - \mu(\{1\}) - \mu(\{3\}) = 0, \\ \Delta^\mu(\{2, 3\}) &= \mu(\{2, 3\}) - \mu(\{2\}) - \mu(\{3\}) = 0, \\ \Delta^\mu(\{1, 2, 3\}) &= \mu(\{1, 2, 3\}) - \mu(\{1, 2\}) - \mu(\{1, 3\}) - \mu(\{2, 3\}) + \mu(\{1\}) + \mu(\{2\}) + \mu(\{3\}) \\ &= -0.3 \end{aligned}$$

となる． $\Delta^\mu(\{1, 2\}) = 0.1 > 0$ より，国語と英語間に優加法的な関係があり， $\Delta^\mu(\{1, 2, 3\}) = -0.3 < 0$ より，全科目では劣加法的な関係があることがわかる．

すべてのメビウス反転値が正， $\Delta^\mu(A) > 0, \forall A \in 2^X$ の場合，対応する μ は，すべての $A \cap B = \emptyset$ で優加法的なファジィ測度となっている．

メビウス反転値を適当に与え，式 (20) を使って，ファジィ測度を求めた場合，ファジィ測度の単調性制約 (5) を満たすとは限らない．負の値を与えた場合，非単調になることがある．メビウス反転値を与える場合，単調なファジィ測度にするには，メビウス反転値に制約を加えなくてはならない．正規なファジィ測度 $\mu(X) = 1$ にするには， $\sum_{A \in 2^X} \Delta^\mu(A) = 1$ となるようにする．

2.7 2-加法的ファジィ測度

2-加法的ファジィ測度 [4] は、2つの評価項目間までの相互作用を認めて、3個間以上の項目間の相互作用を認めないものである。メビウス反転値を使うと、

$$\Delta^\mu(A) = 0 \text{ if } |A| > 2 \quad (21)$$

となる。ファジィ測度を求めるには、式 (20) を使う。

2項目間の相互作用のみを認めるので、同定するパラメタ - 数が大幅に減少する。正規なファジィ測度の場合、 $2^n - 2$ 個のパラメタからなるのに対して、2-加法的ファジィ測度の場合、 $n(n+1)/2 + n - 1$ 個のパラメタからなる。

たとえば、英語と国語間には優加法的な関係、数学と英語、数学と国語間には劣加法的な関係を定義するときは、

$$\begin{aligned} \Delta^\mu(\{1\}) &= 0.3, & \Delta^\mu(\{2\}) &= 0.3, & \Delta^\mu(\{3\}) &= 0.6, \\ \Delta^\mu(\{1,2\}) &= 0.2, & \Delta^\mu(\{1,3\}) &= -0.2, & \Delta^\mu(\{2,3\}) &= -0.2, & \Delta^\mu(\{1,2,3\}) &= 0 \end{aligned}$$

を与えれば (正規なファジィ測度にするために和を $1(\sum_{A \in 2^X} \Delta^\mu(A) = 1)$ にしている)

$$\begin{aligned} \mu(\{1\}) &= 0.3, & \mu(\{2\}) &= 0.3, & \mu(\{3\}) &= 0.6, \\ \mu(\{1,2\}) &= 0.8, & \mu(\{1,3\}) &= 0.7, & \mu(\{2,3\}) &= 0.7, & \mu(\{1,2,3\}) &= 1 \end{aligned}$$

というファジィ測度になる。

一般に、 k 個までの相互作用を認めるファジィ測度を k -加法的ファジィ測度と呼ばれ、

$$\Delta^\mu(A) = 0 \text{ if } |A| > k \quad (22)$$

という性質を持つものである。

3 ファジィ積分

ファジィ積分は、図 1 のように、 n 項目の入力値 x_1, \dots, x_n を、ファジィ測度 μ を広い意味での (相互作用を考慮した) 重みにより総合評価する手法である。 $x_i, i = 1, \dots, n$ を i 番目の評価基準の入力値 (評価値) とする。作業員の例では、 i 番目の作業員の作業時間、成績評価では、 i 番目の科目の得点とする。

ファジィ積分は、さまざまな方法が提案されているが、本稿では max-min 演算を基礎とした菅野積分と差と積の演算で表現したシヨケ積分、およびそれらに関連したファジィ積分を取り上げる。

3.1 菅野積分

ファジィ測度ファジィ積分の概念は、菅野 [1] により提案された。その中で提案された積分が菅野積分である。

菅野積分は、max-min 演算を行うので、入力値、ファジィ測度ともに $[0, 1]$ 区間の値としている。すなわち、 $x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$ かつファジィ測度 μ は、正規なファジィ測度とする。

入力値 x_i を大きい順に並べ替えるような置換 σ を求める。 σ は、同順位なし (同じ値の場合、どちらかを高順位にする) の順位を示す関数で、

$$x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)} \quad (23)$$

となり、かつ $X = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ となる。同じ値が複数ある場合、並べ方は任意とする。

たとえば、 $n = 4$ で、 $x_1 = 0.3, x_2 = 0.8, x_3 = 0.2, x_4 = 0.3$ の場合、 $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 3$ となる。 $x_1 = x_4$ であるので、 $\sigma(2) = 4, \sigma(3) = 1$ としてもよい、

菅野積分 f_μ^S は、次式で定義される (\wedge は \min , \vee は \max を表す)。

$$f_\mu^S(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1, \dots, n} [\mu(\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}) \wedge x_{\sigma(i)}] \quad (24)$$

たとえば、式 (11) のファジィ測度の例で、 $x_1 = 0.6, x_2 = 0.4, x_3 = 0.8$ の場合、 $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$ となるので、

$$f_\mu^S(x_1, x_2, x_3) = (\mu(\{3\}) \wedge x_3) \vee (\mu(\{1, 3\}) \wedge x_1) \vee (\mu(\{1, 2, 3\}) \wedge x_2) = 0.6 \quad (25)$$

となる。

3.2 ショケ積分

ショケ積分 [5] は、室伏らによりファジィ積分の一種として定義された [6]。 $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ の場合、ショケ積分は、次式で定義される。

$$f_\mu^C(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [\mu(\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}) (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)})] \quad (26)$$

ただし、 $\sigma(n+1) = n+1, x_{n+1} = 0$ とする。

たとえば、式 (11) のファジィ測度の例で、 $x_1 = 0.6, x_2 = 0.4, x_3 = 0.8$ の場合、

$$f_\mu^C(x_1, x_2, x_3) = [\mu(\{3\})(x_3 - x_1)] + [\mu(\{1, 3\})(x_1 - x_2)] + [\mu(\{1, 2, 3\})(x_2 - 0)] = 0.7 \quad (27)$$

となる。

3.3 ファジィ積分モデルの性質

3.3.1 連続性

菅野積分 f_μ^S , ショケ積分 f_μ^C とともに、 x_1, \dots, x_n に対して連続な関数である。

3.3.2 単調性

単調性制約 (式 (5)) を満たすファジィ測度でのファジィ積分は、菅野積分 f_μ^S , ショケ積分 f_μ^C とともに x_1, \dots, x_n に対して単調増加関数である。

3.3.3 狭義単調性

単調性制約 (式 (5)) で, すべての A, B で狭義の関係

$$\mu(A) < \mu(B) \text{ if } A \subset B \subseteq X \quad (28)$$

を満たす μ について, ショケ積分 f_μ^C は, 狭義単調増加関数である.

3.4 比較

3.4.1 菅野積分とショケ積分の比較

図 2 は, 式 (11) のファジィ測度を用い, $x_2 = 0.4, x_3 = 0.8$ に固定し, x_1 を 0 から 1 に変化させたときのショケ積分値と菅野積分値である.

このグラフからわかるように, 菅野積分では, \max - \min 演算であるので, 水平線の部分が多くあり, x_1 の増大に対して変化しない部分が多い.

ショケ積分の場合, 式 (11) のファジィ測度は, 狭義の単調性があるので, x_1 の増大に対して, ショケ積分値は, 必ず増大する.

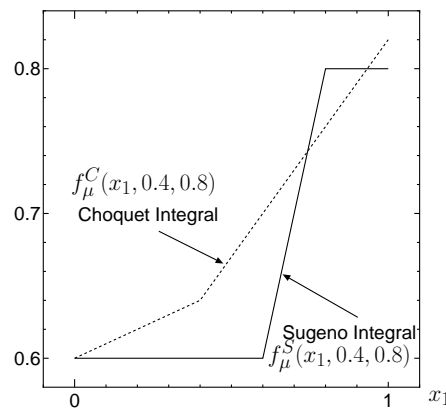


図 2: 菅野積分とショケ積分の比較 (式 (11))

3.4.2 劣加法的なファジィ測度と優加法的なファジィ測度の比較

図 3 は, 式 (10) の劣加法的なファジィ測度を用い, ショケ積分値を計算した 3D グラフである. 劣加法的であるので, x_1 もしくは x_2 のどちらか一方が高い値であるとき高い総合評価値を得る. したがって, $x_1 = x_2$ のラインを谷とするような分布になる.

一方, 図 4 は, 式 (9) の優加法的なファジィ測度を用い, ショケ積分値を計算した 3D グラフである. 優加法的であるので, x_1 と x_2 がともに高い値であるとき高い総合評価値を得る. したがって, $x_1 = x_2$ のラインを尾根とするような分布になる.

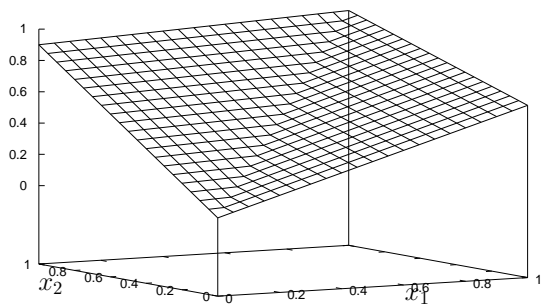


図 3: 劣加法的なファジィ測度のシヨケ積分

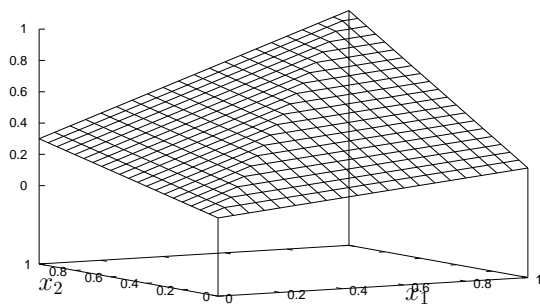


図 4: 優加法的なファジィ測度のシヨケ積分

3.5 利用する上での注意

3.5.1 評価単位の問題

シヨケ積分モデルでは、入力値 (x_1, \dots, x_n) 間で減算を行い、その差の値にファジィ測度をかけている (式 26)。したがって、減算による差が同じ意味を持つものでなくてはならない。したがって、シヨケ積分モデルの入力値は、同じ評価単位で測られていなくてはならない (評価単位の問題)[7]。この問題は、効用理論では「strong commensurability」と呼ばれている。しかし、この問題はなかなか難しい。

同じ評価単位で測られているものであったり、同じ評価単位であるという前提で測られているものであればよいが、そのような問題に限定せずに利用するときは、評価単位を揃えなくてはならない。たとえば、各入力値の系列で、平均 50、標準偏差 10 に正規化した値 (偏差値) など平均、分散を揃えた値、最大値を 1 に正規化する方法がよく行われている。また、満足点や理想点を使って同じ評価単位に揃える方法も提案されている [8]。

3.5.2 入力値の方向の問題

評価単位の問題と同様に、入力値の方向の問題も重要である。ファジィ測度の値を非負にするとき、特に、単調性制約を仮定するときは、重要である。

入力値の方向の問題では、 x_i が増大が総合評価値を増大させる効果があるのか減少させる効果があるのかをあらかじめ決定することである。もし、減少させる効果があるときは、符号をつけ直してから、評価単位を調整し、シヨケ積分の入力値にする。

効果の方向が不明の場合、総合評価値との単相関が正になるようにすることがよく行われている。

3.6 負の入力値を持つ場合

3.6.1 シュマイドラーの拡張

負の入力値を含む場合、 $x_i \in \mathbf{R}, \forall i$ のときのシヨケ積分は、シュマイドラー (Schmeidler) により拡張された [9]。 $X = \{1, \dots, n\}$ を評価基準の集合、 $x_0 = 0$ とし、 $x_i (i = 1, \dots, n)$ にこの x_0 を含めた置換を $\sigma(1), \dots, \sigma(n+1)$ する。すなわち、 $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n+1)\} = \{0, 1, \dots, n\}$ とし、

$x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \cdots \geq x_{\sigma(n+1)}$ となるような置換である．このとき， $\sigma(i) = 0$ となる i を k とする．すなわち， $\sigma(k) = 0$ とし， $x_{\sigma(k)} = 0$ である．

$$f_{\mu}^C(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{k-1} [\mu(\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\})(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)})] \\ + \sum_{i=k}^n [(\mu(\{\sigma(i+1), \dots, \sigma(n+1)\}) - \mu(X))(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)})] \quad (29)$$

3.6.2 シボツシュ積分

シボツシュ積分 [10] は，次式で計算される．

$$x_i^+ := \begin{cases} x_i & \text{if } x_i \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

$$x_i^- := \begin{cases} -x_i & \text{if } x_i < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

とし，

$$f_{\mu}^{SP}(x_1, \dots, x_n) := f_{\mu}^C(x_1^+, \dots, x_n^+) - f_{\mu}^C(x_1^-, \dots, x_n^-) \quad (32)$$

とする．式 (30) と式 (31) で，入力値を正と負に分け，式 (32) の右辺第 1 項で正の部分を評価し，第 2 項で負の部分を評価し，正の部分の評価値から負の部分の評価値を減じている．

3.6.3 比較

シヨケ積分は，次の性質を持つ．

$$f_{\mu}^C(ax_1 + b, \dots, ax_n + b) = af_{\mu}^C(x_1, \dots, x_n) + b, \quad \forall a \geq 0, \forall b \in \mathbf{R} \quad (33)$$

$$x_i \geq y_i, i = 1, \dots, n \rightarrow f_{\mu}^C(x_1, \dots, x_n) \geq f_{\mu}^C(y_1, \dots, y_n) \quad (34)$$

となる．シボツシュ積分は，次の性質を持つ．

$$f_{\mu}^{SP}(ax_1, \dots, ax_n) = af_{\mu}^{SP}(x_1, \dots, x_n), \quad \forall a \in \mathbf{R} \quad (35)$$

$$x_i \geq y_i, i = 1, \dots, n \rightarrow f_{\mu}^{SP}(x_1, \dots, x_n) \geq f_{\mu}^{SP}(y_1, \dots, y_n) \quad (36)$$

となる，

式 (33) より，シヨケ積分が，間隔尺度で測った x_1, \dots, x_n の積分であり，積分値も間隔尺度であり，式 (35) より，シボツシュ積分が，比例尺度で測った x_1, \dots, x_n の積分であり，積分値も比例尺度であることを示している [11] ．

4 拡張・他の評価法との関係

4.1 集計関数

シヨケ積分モデルは、さまざまなよい性質を持った集計関数 [12] であり、線型補間関数である [13] ことが知られている。

また、さまざまな広義の平均値の計算方法をシヨケ積分モデルで表現可能である。ファジィ測度を通して、さまざまな評価法の性質の検討が可能になる。また、第 5.2 節のような方法を利用して、各評価法の中間の評価法を作成できる。

4.1.1 加重平均値

加重平均値は、 n 個の評価基準に対して、その重みを $w_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n w_i = 1$ とする。加重平均値を求めるファジィ測度は次式となる。

$$\mu(A) = \sum_{i \in A} w_i, \forall A \in 2^X \quad (37)$$

4.1.2 最大値・最小値

最大値を求めるファジィ測度は次式となる。

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (38)$$

最小値を求めるファジィ測度は次式となる。

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A = X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (39)$$

4.1.3 中央値

中央値は、 n が奇数の場合と偶数の場合で異なる。奇数の場合、すべての $A \in 2^X$ について、

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } (|A|/n) > 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (40)$$

とし、偶数の場合、真ん中の 2 つのデータの平均値を求めるので、すべての $A \in 2^X$ について、

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } (|A|/n) > 1/2 \\ 0.5 & \text{if } (|A|/n) = 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (41)$$

とすれば、シヨケ積分モデルで中央値を計算できる [14]。

4.1.4 $\alpha\%$ 調整平均値

$\alpha\%$ 調整平均値は，上位下位それぞれ $p = \text{int}(n\alpha/100)$ 個のデータを外し，残り $n - 2p$ 個の算術平均値を求めるので，

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } (|A|/n) \geq 1 - (\alpha/100) \\ 0 & \text{if } (|A|/n) \leq \alpha/100 \\ \frac{|A| - p}{n - 2p} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (42)$$

というファジィ測度で表現できる (int は，小数点以下を切り捨てて整数化する関数とする)。

4.2 OWA オペレータとの関係

順位により重みを変えて，評価，広義の平均値を出力するモデルとして OWA オペレータ [15] がある． i 番目に大きい入力値への重みを β_i (ただし， $\beta_i \in [0, 1], \sum \beta_i = 1$)， $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ とし，順位に関する加重平均値を求めるものである．

$$f_{\beta}^{OWA}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \beta_i x_{\sigma(i)} \quad (43)$$

$\beta = (1, 0, \dots, 0)$ とすれば最大値による評価を表し， $\beta = (0, \dots, 0, 1)$ とすれば最小値による評価を表すなど，ファジィ測度・シヨケ積分モデルと近く，OWA オペレータは次の正規なファジィ測度で表現できる．

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{|A|} \beta_i \quad (44)$$

$n = 3$ の場合，

$$\mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = \beta_1 \quad (45)$$

$$\mu(\{1, 2\}) = \mu(\{1, 3\}) = \mu(\{2, 3\}) = \beta_1 + \beta_2 \quad (46)$$

$$\mu(\{1, 2, 3\}) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \quad (47)$$

となる．OWA オペレータは，順位に対して重みを与えるものであり，入力値の評価項目に重みを与えるものではない．順位に対する重みと評価項目への重みの両方を表現するのがファジィ測度・シヨケ積分モデルである．

4.3 ファジィ論理関数

4.3.1 定数係数を持ったファジィ論理関数

論理関数の入力値や定数係数をファジィ値 ($x_i \in [0, 1]$) にし， \wedge に min 演算， \vee に max 演算， \neg に $1 - x_i$ を割り当てたものが (定数係数を持った) ファジィ論理関数 [16] である．例として，

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0.3 \wedge \neg x_3) \vee (0.8 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee 0.1 \quad (48)$$

をあげる．max-min 演算を行う場合， f に肩字 M をつける．式 (48) で， $f^M(0.2, 0.7, 0.9) = \max[\min(0.3, 1 - 0.9), \min(0.8, 0.2, 0.7), \min(1 - 0.2, 0.7, 0.9), 0.1] = 0.7$ となる．

4.3.2 拡張ファジィ測度 ([0, 1] への集合関数)

ファジィ論理関数を扱うために拡張ファジィ測度 ([0, 1] への集合関数) [17],[18] μ^* を定義する． $f^M(0, \dots, 0) = 0$ とは限らないので， $\mu^*(\emptyset) = 0$ の制約をおかず，

$$\mu^* : 2^X \rightarrow [0, 1] \quad (49)$$

とする．拡張ファジィ測度をファジィ論理関数の 2 値の入力により割り当てる．

$$\mu^*(A) = f^M(x_1, \dots, x_n) \quad (50)$$

$$\text{where } x_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in A \\ 0 & \text{if } i \notin A \end{cases} \quad (51)$$

例えば，式 (48) では， $\mu^*({1, 3}) = f^M(1, 0, 1) = 0.1$ となる．式 (48) の拡張ファジィ測度を表 1 に示す．

表 1: 拡張ファジィ測度 μ^* の例 (式 (1))

A	\emptyset	{1}	{2}	{1, 2}	{3}	{1, 3}	{2, 3}	X
$\mu^*(A)$	0.3	0.3	0.3	0.8	0.1	0.1	1.0	0.8

4.3.3 拡張シヨケ積分 ([0, 1] への集合関数に関するシヨケ積分)

拡張ファジィ測度では， $\mu(\emptyset) = 0$ とは限らないので，式 (26) のシヨケ積分を適用すると値が発散してしまう．拡張シヨケ積分 ([0, 1] への集合関数に関するシヨケ積分)[17],[18] は， $x_i \in [0, 1], \forall i$ として，次のように定義する．

$$f_{\mu^*}^{EC}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^n [\mu(\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\})(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i+1)})] \quad (52)$$

ただし， $\sigma(0) = 0, x_0 = 1, \sigma(n+1) = n+1, x_{n+1} = 0$ ，また $i = 0$ のとき $\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\} = \emptyset$ とする．また，拡張シヨケ積分は，通常のシヨケ積分で表現できる．

$$f_{\mu^*}^{EC}(x_1, \dots, x_n) = f_{\mu}^C(x_1, \dots, x_n) + \mu^*(\emptyset) \quad (53)$$

ただし， $\mu(A) = \mu(A) - \mu^*(\emptyset), \forall A \in 2^X$ とする．

たとえば， $n = 3$ で， $x_1 = 0.2, x_2 = 0.7, x_3 = 0.9$ のとき， $x_0 = 1, x_4 = 0$ とおくと， $x_0 \geq x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq x_4$ となるので，

$$f_{\mu^*}^{EC}(0.2, 0.7, 0.9) = \mu^*(\emptyset)(1 - 0.9) + \mu^*({3})(0.9 - 0.7) + \mu^*({2, 3})(0.7 - 0.2) + \mu^*({1, 2, 3})(0.2 - 0) \quad (54)$$

となる．

4.3.4 Maxmin 演算によるファジィ論理関数と相補律・単調性

Maxmin 演算によるファジィ論理関数の演算は，一般に相補律（矛盾律，排中律）を満たさない．ファジィ論理関数は，本質的には，真 (1) と偽 (0) と未知不明 (0.5) の 3 値である [19]．2 値の入力に対して単調な入出力関係があっても， $x_i \in [0, 1]$ について単調な入出力関係を満たさないことがある．たとえば，

$$f_0(x_1, x_2) = (0.7 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (0.9 \wedge x_2) \vee 0.2 \quad (55)$$

は， $f_0^M(0, 0) = 0.2$ ， $f_0^M(1, 0) = 0.7$ ， $f_0^M(0, 1) = 0.9$ ， $f_0^M(1, 1) = 0.9$ となり， $f_0^M(x_1, x_2)$ は， x_1, x_2 の 0 と 1 の入力 (定義域を $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2$ とした場合) に関しては，単調増加関数である．しかし， $[0, 1]$ の入力 (定義域を $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$ とした場合) に関しては，図 5 からわかるように，単調増加関数ではない．

シヨケ積分で計算すると相補律を満たす [17],[18]．2 値の入力に対して，単調であれば，式 (51) により割り当てられたファジィ測度は，単調性を満たし，よって， $[0, 1]$ の入力に関して，単調増加性を持つ (例えば，図 6)．すなわち，0 と 1 の 2 値で単調性

$$f^M(x_1, \dots, x_n) \geq f^M(y_1, \dots, y_n) \quad (56)$$

$$x_i \geq y_i, x_i \in \{0, 1\}, y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n$$

ならば， $[0, 1]$ 区間で

$$f^M(x_1, \dots, x_n) \geq f^M(y_1, \dots, y_n) \quad (57)$$

$$x_i \geq y_i, x_i \in [0, 1], y_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$$

となり，単調性が成立する．

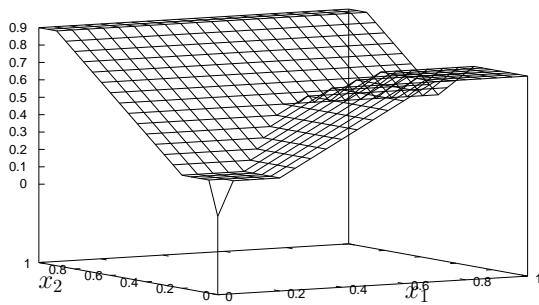


図 5: 式 (55) を MaxMin 演算で計算

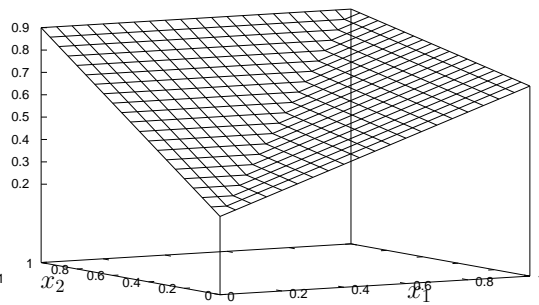


図 6: 式 (55) をシヨケ積分で計算

4.3.5 入力方向の問題

シヨケ積分によるファジィ論理関数の計算は入力値の方向に依存する [17] . 式 (55) の x_1, x_2 の方向を逆にしたものを示す .

$$f_1(x_1, x_2) = (0.7 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (0.9 \wedge x_2) \vee 0.2 \quad (58)$$

$$f_2(x_1, x_2) = (0.7 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (0.9 \wedge \neg x_2) \vee 0.2 \quad (59)$$

$$f_3(x_1, x_2) = (0.7 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (0.9 \wedge \neg x_2) \vee 0.2 \quad (60)$$

式 (58) は , 式 (55) の x_1 について , x_1 を $\neg x_1$ に , $\neg x_1$ を x_1 に置き換えることにより入力方向を逆にしたものである . 同様に , 式 (59) は x_2 に関して , 式 (60) は x_1 と x_2 の両方に関して , 入力方向を逆にしたものである .

Maxmin 演算では , 2 重否定 ($\neg\neg x_i = x_i$) が成立するので , $f_0^M(x_1, x_2) = f_1^M(1 - x_1, x_2) = f_2^M(x_1, 1 - x_2) = f_3^M(1 - x_1, 1 - x_2), \forall x_i \in [0, 1]$ となる .

しかし , この性質は , シヨケ積分では成立しない . 表 2 は , 式 (55)~(60) のファジィ論理関数を拡張ファジィ測度に割り当てたもので $x_1 = 0.3, x_2 = 0.9$ の場合の $f_{\mu_0^*}^{EC}(x_1, x_2), f_{\mu_1^*}^{EC}(1 - x_1, x_2), f_{\mu_2^*}^{EC}(x_1, 1 - x_2), f_{\mu_3^*}^{EC}(1 - x_1, 1 - x_2)$ を計算したものである . $x_1 = 0.3, x_2 = 0.9$ の場合 , $f_{\mu_0^*}^{EC}(x_1, x_2) \neq f_{\mu_1^*}^{EC}(1 - x_1, x_2)$ となっているように , 入力方向に依存している . $f_0^{EC}(x_1, x_2)$ と $f_1^{EC}(1 - x_1, x_2)$ は , 一般に等しくならない .

全変数 x_1, \dots, x_n を逆にしたものは一致するので , $f_0^{EC}(x_1, x_2) = f_3^{EC}(1 - x_1, 1 - x_2), f_1^{EC}(1 - x_1, x_2) = f_2^{EC}(x_1, 1 - x_2)$ は成立する .

$f_{\mu_0^*}^{EC}(0.8, x_2)$ と $f_{\mu_1^*}^{EC}(0.2, x_2)$ について , x_2 を変化させたグラフを図 7 に示す .

表 2: f_0, \dots, f_3 の拡張ファジィ測度とシヨケ積分値

		拡張ファジィ測度				計算例 1	計算例 2
		\emptyset	{1}	{2}	{1, 2}	$x_1 = 0.3, x_2 = 0.9$	$x_1 = 0.4, x_2 = 0.2$
f_0	μ_0^*	0.2	0.7	0.9	0.9	$f_{\mu_0^*}^{EC}(0.3, 0.9) = 0.83$	$f_{\mu_0^*}^{EC}(0.4, 0.2) = 0.44$
f_1	μ_1^*	0.7	0.2	0.9	0.9	$f_{\mu_1^*}^{EC}(0.7, 0.9) = 0.88$	$f_{\mu_1^*}^{EC}(0.6, 0.2) = 0.54$
f_2	μ_2^*	0.9	0.9	0.2	0.7	$f_{\mu_2^*}^{EC}(0.3, 0.1) = 0.88$	$f_{\mu_2^*}^{EC}(0.4, 0.8) = 0.54$
f_3	μ_3^*	0.9	0.9	0.7	0.2	$f_{\mu_3^*}^{EC}(0.7, 0.1) = 0.83$	$f_{\mu_3^*}^{EC}(0.6, 0.8) = 0.44$

4.3.6 入力方向に依存しないシヨケ積分モデル – 論理型シヨケ積分 –

入力方向に依存しないシヨケ積分モデルとして論理型シヨケ積分 (AV 型) を定義した [17],[18] . 式 (55) での論理型シヨケ積分 (AV 型) は , 表 2 の 4 つの積分値の平均値 (2 組は同じ値なので , 実際は 2 つの平均値) を求めたもので , 次の式で求める .

$$f_{\mu_0^*}^{AV}(x_1, x_2) = \frac{f_{\mu_0^*}^{EC}(x_1, x_2) + f_{\mu_1^*}^{EC}(1 - x_1, x_2)}{2} \quad (61)$$

詳細な定義は , [17],[18] に譲るが , この計算を行うファジィ測度を定義できる . 図 7 の $f_{\mu_0^*}^{AV}$ は , 論理型シヨケ積分 (AV 型) による出力値である .

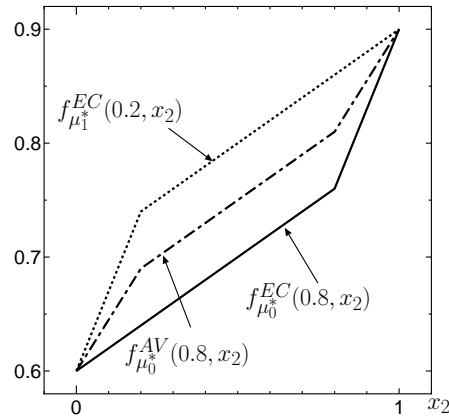


図 7: 入力方向の問題 ($f_{\mu_0^*}^{EC}$, $f_{\mu_1^*}^{EC}$ と $f_{\mu_0^*}^{AV}$)

4.4 ファジィルールによるシヨケ積分型評価

4.4.1 ファジィルール表

入力値の大きさにより評価方法 – 補完的 または 代替的 – を変更したい場合がある。たとえば、得点が低いエリアでは代替的な評価、得点が高いエリアでは補完的な評価をする場合である。図 8 のように、領域を分割し、領域の境界点 (n 次元の超直方体の頂点) を代表点と呼ぶ。代表点に出力値を与え、領域内部の点の出力値は代表点の出力値から補間する。この補間にシヨケ積分を使う方法が「ファジィルールによるシヨケ積分型評価」である [20]。

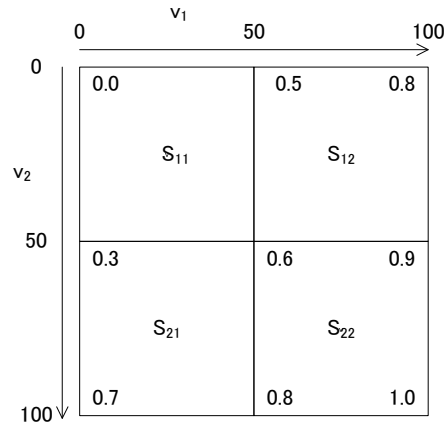


図 8: ファジィルール (代表点での入出力関係)

4.4.2 計算方法

- (1) 入力値 入力値 v_1, \dots, v_n を与える。たとえば、 $n = 2$, $v_1 = 80$, $v_2 = 40$ とする。
- (2) 領域選択 図 8 のようなファジィルール表に従い、該当する領域を選択する。境界上の場合、その境界が属する任意の領域とする。例の場合、 S_{12} が選択される。

(3) 基準点の選択 領域の代表点の中から，基準点を選択する．選択方法はいくつかあり，もっとも小さい座標の点を選択する（TF型）．例の場合， S_{12} の左上の点（ $v_1 = 50, v_2 = 0$ ）を基準点とする．

(4) 拡張ファジィ測度の割り当て 基準点の集合を空集合（ \emptyset ）として，拡張ファジィ測度を割り当てる． S_{12} では，左上の点が基準点となるので， S_{12} の4つの代表点から，拡張ファジィ測度 $\mu_{S_{12}}^*$ を

$$\mu_{S_{12}}^*(\emptyset) = 0.5, \mu_{S_{12}}^*({1}) = 0.8, \mu_{S_{12}}^*({2}) = 0.6, \mu_{S_{12}}^*({1,2}) = 0.9 \quad (62)$$

とする．

(5) 入力値 x_i の割り当て 入力値は，基準点から選択した領域内での差異で表す．たとえば， S_{12} で，左上の点を基準点とした場合，

$$x_1 = \frac{v_1 - 50}{100 - 50}, x_2 = \frac{v_2 - 0}{50 - 0} \quad (63)$$

とする． $v_1 = 80$ のとき $x_1 = 0.6$, $v_2 = 40$ のとき $x_2 = 0.8$ となる．

(6) 拡張シヨケ積分による出力値の計算 (4) で求めた拡張ファジィ測度と (5) での入力値を拡張シヨケ積分を使って出力値を求める． $f_{\mu_{S_{12}}^*}^C(0.6, 0.8) = 0.76$ となる．

4.4.3 基準点の選択方法

基準点の選択により出力値は異なる．基準点の選択は，第4.3節の入力の方向の問題と同じになる．したがって，各領域で基準点をどのように選択するかにより出力値が異なる．そこで3つの方法を提案した．

TF型 各領域で入力の値がもっとも小さい代表点を基準点とする方法

BP型 ファジィルール表のすべての代表点の中から1点を選び，参照点とし，各領域の基準点は参照点にもっとも近い点とする．

AV型 基準点の選択の問題（入力の方向の問題）をなくすため，積分方法を論理型シヨケ積分（AV型）にしたものである．

そのほかにも考えられるが，適当に選択すると，境界線上の出力値が，その境界を有する複数の領域で計算した値が異なることがある．境界線領域での出力が異なると， v_i に関しての全体としての連続性が損なわれる．上記3つの選択方法は，この全体としての連続性がある．

4.4.4 性質

TF, BP, AV型で計算した出力値は， v_1, \dots, v_n に対して連続である．もし，ファジィルール表がある入力に対して単調な出力値を割り当てていれば，出力値もその入力に対して単調である．図9は，図8の出力（TF型，出力は100倍）である．

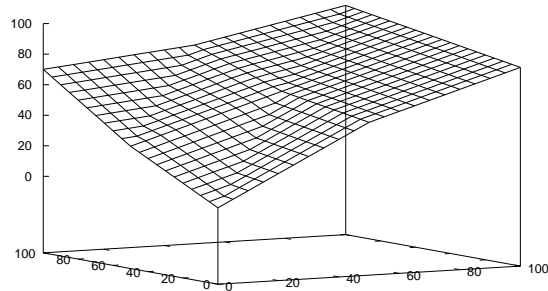


図 9: 図 8 の出力 (TF 型, 出力は 100 倍)

4.5 参照点からの評価 – 双容量に関するシヨケ積分との関連 –

グラビシュ(Grabisch)ら [21],[22],[23] は, 双容量に関するシヨケ積分を定義し, それは, トヴェルスキー (Tversky) らの累積プロスペクト理論 [24] を含んでいるとしている.

4.5.1 双容量に関するシヨケ積分

双容量 $Q(X) = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X \mid A \cap B = \emptyset\}$ とおく. 双容量 (bi-capacity) とは, 次の条件を満たす関数 $v: Q(X) \rightarrow [-1, 1]$ である.

- $A \subset A'$ ならば $v(A, B) \leq v(A', B)$, $B \subset B'$ ならば $v(A, B) \geq v(A, B')$ (単調性).
- $v(\emptyset, \emptyset) = 0$ (中立値).
- $v(X, \emptyset) = 1, v(\emptyset, X) = -1$ (正規性)

双容量に関するシヨケ積分 双容量に関するシヨケ積分は, 次のように定義されている [21]. v を双容量とする. $X^+ := \{i \in X \mid x_i \geq 0\}$, $X^- := X \setminus X^+$ とする. v に関する x_1, \dots, x_n のシヨケ積分は, 次式で定義される.

$$f_v^{BC}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n |x_{\sigma(i)}| [v(A_{\sigma(i)} \cap X^+, A_{\sigma(i)} \cap X^-) - v(A_{\sigma(i+1)} \cap X^+, A_{\sigma(i+1)} \cap X^-)] \quad (64)$$

ただし, ここで σ は $|x_{\sigma(1)}| \leq \dots \leq |x_{\sigma(n)}|$ となる X 上の置換であり, $A_{\sigma(i)} := \{\sigma(i), \dots, \sigma(n)\}$ とする.

4.6 累積プロスペクト理論とファジィ積分の関係

累積プロスペクト理論では, $x_i \in R$ を効用とし, 正の部分と負の部分とを別個に評価する. 正の効用と負の効用を別々にシヨケ積分で計算し, その和を求めることにより, 累積プロスペクト理論をシヨケ積分で表現できる [26].

x_i^+ を式 (30) で, x_i^- を式 (31) で定義する. 正の部分の評価するファジィ測度 μ^+ と負の部分の評価するファジィ測度 μ^- を別個に与えれば, 累積プロスペクト理論は,

$$f_{\mu^+}^C(x_1^+, \dots, x_n^+) - f_{\mu^-}^C(x_1^-, \dots, x_n^-) \quad (65)$$

で表現できる.

式 (65) は, 式 (32) のシボツシュ積分のファジィ測度 μ を正の部分計算するための部分 μ^+ と負の部分計算する部分 μ^- として別個に与えたものである.

また,

$$v(A, B) = \mu^+(A) - \mu^-(B) \quad (66)$$

として, 双容量に関するシヨケ積分を行えば,

$$f_v^{BC}(x_1, \dots, x_n) = f_{\mu^+}^C(x_1^+, \dots, x_n^+) - f_{\mu^-}^C(x_1^-, \dots, x_n^-) \quad (67)$$

となる. 双容量では $A \neq \emptyset$ かつ $B \neq \emptyset$ のとき, $v(A, B) = \mu^+(A) - \mu^-(B)$ とは異なる $v(A, B)$ の値を設定できる. したがって, 双容量に関するシヨケ積分は, 累積プロスペクト理論を含む.

また, ファジィルールによるシヨケ積分型評価 (BP 型) は, 中心点 (原点) を参照点にすれば, 双容量に関するシヨケ積分を表現できる [20].

5 ファジィ測度の同定法

5.1 データからの同定

回帰分析のように, データからファジィ測度を求めることも可能である. 線形回帰分析では, $y = a_1x_1 + a_2x_2 + b$ のパラメータ a_1, a_2, b を正規方程式などで求める.

シヨケ積分の場合, x_i^j を入力値 (説明変数) x_i の j 番目のサンプル, y^j を観測値, \hat{y}^j を推定値とする. m 組 ($j = 1, \dots, m$) の説明変数と観測値の組からファジィ測度 μ と b を推定するには, 次のような凸 2 次計画問題を解く.

$$\text{最小化: } \sum_{j=1}^m (y^j - \hat{y}^j)^2 \quad (68)$$

制約条件

$$\hat{y}^j = f_{\mu}^C(x_1^j, \dots, x_n^j) + b, \quad j = 1, \dots, m \quad (69)$$

$$\mu(A) \geq \mu(B) \text{ if } A \supseteq B, \quad \forall A, B \in 2^X \quad (70)$$

表 3: 線形回帰分析 ($n = 2$)

j	x_1^j	x_2^j	y^j
1	10	7	11
2	8	14	15
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	15	13	17

表 4: 線形回帰分析 ($n = 2$)

j	$\max(x_1^j - x_2^j, 0)$ $\mu(\{1\})$	$\max(x_2^j - x_1^j, 0)$ $\mu(\{2\})$	$\min(x_1^j, x_2^j)$ $\mu(\{1, 2\})$	y^j
1	3	0	7	11
2	0	6	8	15
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
m	2	0	13	17

例えば, $n = 2$ で, 表 3 のデータについて考える. 表 3 のデータを表 4 のように展開し, 線型回帰分析と同様に, $\mu(\{1\}), \mu(\{2\}), \mu(\{1, 2\})$ と定数項 b (もしくは, b の代わりに拡張ファジィ測度として, $\mu(\emptyset)$) を求める. $\mu(\{1, 2\}) \geq \mu(\{1\}) \geq \mu(\emptyset) \geq 0$, $\mu(\{1, 2\}) \geq \mu(\{2\}) \geq \mu(\emptyset) \geq 0$ という制約式が加わるので, 凸 2 次計画問題となる.

このファジィ測度の同定問題は解決すべき問題が多い. たとえば, 統計学的な指標はあまり整備されていない. 表 4 のように展開されてもそのまま線形回帰分析の指標を使うことはできない.

同定すべきパラメータの数が多い. 入力変数の数を n とすると $2^n - 1$ 個のパラメータを同定しなくてはならない. 少ないサンプルから同定すると過剰にデータに適合する恐れが大きい. そこで, 基本的に加法性を仮定し必要な部分だけ非加法的にしたり, 階層化したり, ファジィ論理関数にあてはめたりする方法が検討されている.

入力値の問題として, 評価単位を揃えなくてはならない. すでに与えられたデータの評価単位を揃えなくてはならない.

ファジィ測度の同定問題については, [7] や [25] に詳しい.

5.2 λ ファジィ測度, スケーリング関数の利用

本節では, ファジィ測度全体で 1 つの相互作用を与え, 各評価基準に対する重みを与えて, ファジィ測度を同定する方法を紹介する.

5.2.1 λ ファジィ測度

λ ファジィ測度は, 菅野 [1] に定義されたもので, $\lambda > -1$ として,

$$\mu_\lambda(A) + \mu_\lambda(B) + \lambda \mu_\lambda(A) \mu_\lambda(B) = \mu_\lambda(A \cup B), \forall A, B \in 2^X, A \cap B = \emptyset \quad (71)$$

を満たすファジィ測度である. λ は, 相互作用の度合いで, $-1 < \lambda < 0$ で劣加法的, 0 で加法的, 正で優加法的となる. λ と各評価基準への重み $w_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum w_i = 1$ を与えて, $A \cap B = \emptyset$ を満たすすべての A, B について式 (71) を満たす正規なファジィ測度を求める.

ファジィ測度の重要度に意味はいくつかある. 意味が異なれば, 同定されるファジィ測度は異なる. そこで, いくつかの重みの基準を提示された [27].

シングルトンファジィ測度比率基準 シングルトンファジィ測度比率基準は,

$$\mu_\lambda(\{1\}) : \dots : \mu_\lambda(\{n\}) = w_1 : \dots : w_n \quad (72)$$

を満たす λ ファジィ測度と定義されている.

シャプレイ値基準 シャプレイ値基準は，ファジィ測度のシャプレイ値を重みに一致させる同定法である．

$$sh_i(\mu_\lambda) = w_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (73)$$

入力の数基準 入力の数基準は，重要度 w_i を有理数で与え， w_i が非負の整数になるように， $k > 0$ 倍し ($\omega_i = w_i \times k$)， $\sum \omega_i$ 個の等重みの評価基準としてファジィ測度を割り当てる方法である．

5.2.2 スケーリング関数による方法

スケーリング関数 (Scaling Function)[28] g は，広義単調増加関数（非減少関数）で， w_i を和が 1 となる重要度もしくは確率として，

$$\mu(A) = g\left(\sum_{i \in A} w_i\right), \quad \forall A \in 2^X \quad (74)$$

として，ファジィ測度を割り当てる．

5.2.3 ϕ_s 変換のよるファジィ測度の割り当て

ϕ_s 変換 [29],[30] は，スケーリング関数の一つで，パラメータ s によって，相互作用を与えることができる．

$$\phi_s(u) = \begin{cases} \langle u \rangle & \text{if } s = 0 \\ u & \text{if } s = 1 \\ 1 - \langle 1 - u \rangle & \text{if } s = +\infty \\ (s^u - 1)/(s - 1) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (75)$$

$$\text{ただし } \langle u \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{if } u = 0 \end{cases}$$

ϕ_s 変換は， λ ファジィ測度と対応していて， $s = \lambda + 1$ とすれば， λ ファジィ測度となる．任意の $s > 0, a > 0, b > 0$ (ただし $a + b \leq 1$) に対して，

$$\phi_s(a) + \phi_s(b) + (s - 1)\phi_s(a)\phi_s(b) = \phi_s(a + b) \quad (76)$$

となる．また， s や λ は $+\infty$ まで値をとり，相互作用の指標としては使いづらい．そこで， $\xi = \phi_s(0.5)$ の値を相互作用の指標として使われている． ξ は， $[0, 1]$ の値をとり，0 に近ければ，優加法的，1 に近ければ劣加法的，0.5 で加法的になる．また， ξ から s は，

$$s = \frac{(1 - \xi)^2}{\xi^2} \quad (77)$$

で求めることができる． ϕ_s 変換を使って同定したファジィ測度は， λ ファジィ測度での入力の数基準になる．

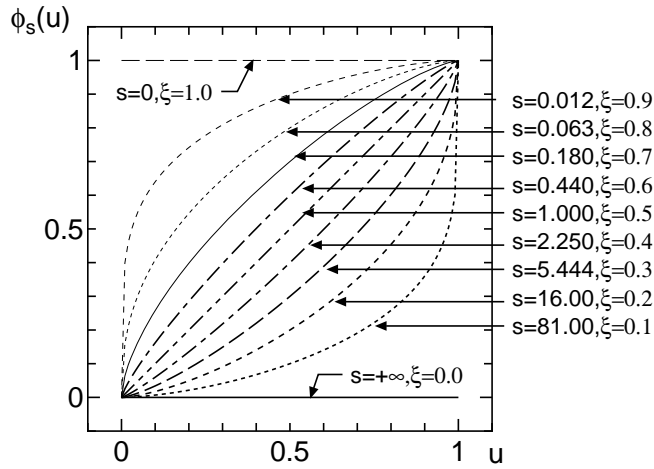


図 10: ϕ_s 変換の形状

ϕ_s 変換でのファジィ測度の割り当てでは, 相互作用 ξ と各評価基準の重要度 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $\sum w_i = 1$ をパラメータとして与え, ファジィ測度 $\mu_{\xi, \mathbf{w}}$ を

$$\mu_{\xi, \mathbf{w}}(A) = \phi_s\left(\sum_{i \in A} w_i\right), \quad \forall A \in 2^X \quad (78)$$

で与える (ただし, $s = (1 - \xi)^2 / \xi^2$).

5.2.4 感度分析

図 11 は, $n = 3$ として, 重要度を $\mathbf{w} = (1/6, 2/6, 3/6)$ とし, ξ を変化させ, ϕ_s 変換でファジィ測度 $\mu_{\xi, \mathbf{w}}$ を割り当て, 3 つの入力値の組の出力値を比較したものである. $f_{\mu_{\xi, \mathbf{w}}}^C(70, 70, 70)$ は, 3 つの入力値が同じであるので, ξ を変化させても総合評価値には変化はない. $f_{\mu_{\xi, \mathbf{w}}}^C(50, 70, 90)$ は, ξ が小さい場合, 優加法的になり, 50 より大きい部分は評価されないが, ξ が大きくなるにつれ, 劣加法的になり, 50 より大きい部分が評価される. $f_{\mu_{\xi, \mathbf{w}}}^C(90, 70, 50)$ は, $f_{\mu_{\xi, \mathbf{w}}}^C(50, 70, 90)$ と同様に, 大きくなるが, 90 への重みが小さいので, ξ が小さい部分では変化は小さい.

図 12 は, $f_{\mu_{\xi}}^C(50, 70, 90) = \mu_{\xi, \mathbf{w}}(\{3\})(x_3 - x_2) + \mu_{\xi, \mathbf{w}}(\{2, 3\})(x_2 - x_1) + \mu_{\xi, \mathbf{w}}(\{1, 2, 3\})x_1$ を $\mu_{\xi, \mathbf{w}}(\{3\})(x_3 - x_2)$ と $\mu_{\xi, \mathbf{w}}(\{2, 3\})(x_2 - x_1)$, $\mu_{\xi, \mathbf{w}}(\{1, 2, 3\})x_1$ の部分に分け, 累積グラフにしたものである. ξ の増大とともに, $\mu_{\xi}(\{3\})$ や $\mu_{\xi}(\{2, 3\})$ が増大し, それに伴って $\mu_{\xi}(\{3\})(x_3 - x_2)$ と $\mu_{\xi}(\{2, 3\})(x_2 - x_1)$ が増大する.

5.2.5 相互作用の指標と感性語

λ や ξ 等の指標と感性語と対応されることができる. 表 5 は, その対応表である [27].

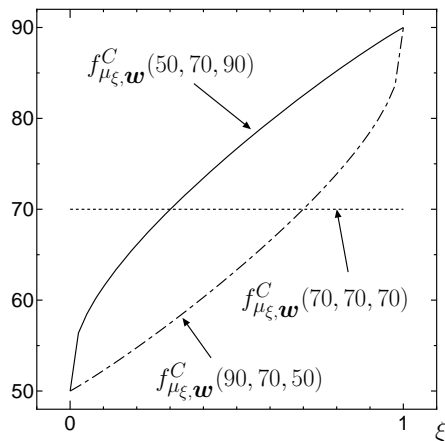


図 11: 感度分析 ($w = (1/6, 2/6, 3/6)$)

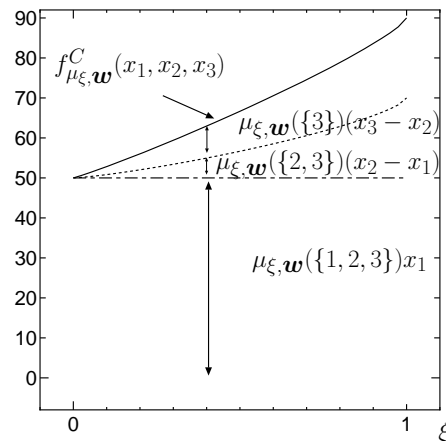


図 12: $x_1 = 50, x_2 = 70, x_3 = 90$ の図解

5.3 ダイヤモンド型一対比較

従来の AHP などで行われる一対比較は重要性の一対比較のみであったが、図 13 のように、ダイヤモンド型に拡張した [31],[32]。縦軸が、相互作用の一対比較で、菱形内の 1 点を回答する。

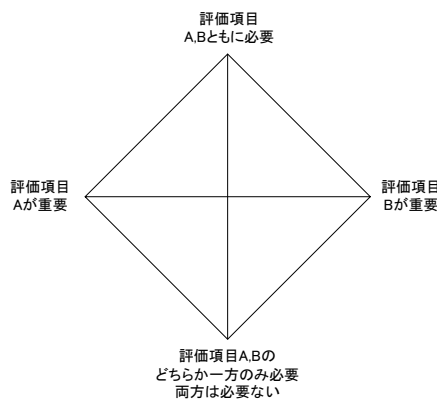


図 13: ダイヤモンド型

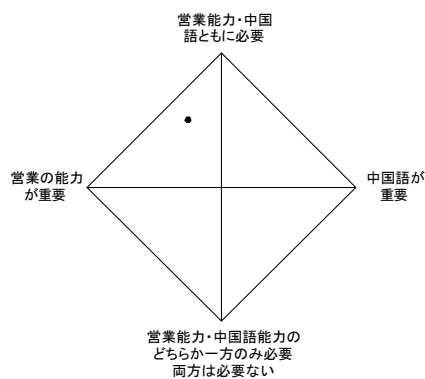


図 14: 営業能力と中国語能力

例題は「海外営業員の採用」で、評価項目は「国際経済・貿易の能力」(E1)「営業能力」(E2)「英語能力」(E3)「中国語能力」(E4)「フランス語能力」(E5)とする。すべての従来の一対比較と同様に、すべての評価項目の組み合わせについて、図 14 のような菱形のアンケートに回答する。縦軸を相互作用の指標（上方を優加法性，下方を劣加法性）とし、横軸は従来の AHP と同様どちらを重要視するのかを回答する。

縦軸の相互作用の一対比較から階層型クラスタリングを用いて、階層関係と各節の相互作用の指標を求め、重要度と合わせて図 15 のような階層図を推定し、この階層図からファジィ測度を同定する。

表 5: 相互作用の呼び方

λ	$\lambda > 0$	$-1 < \lambda < 0$
ξ	0.5 より小	0.5 より大
ファジィ測度	優加法的	劣加法的
一般的な呼び方	補完的 相乗効果	代替的 相殺効果
その他の呼び方 (相互作用が外部にある場合)	バランス重視 消極的な 慎重な 悲観的な 保守的な 確実性重視	個性重視 積極的な 大胆な 楽観的な 冒険的な 可能性重視
極端な場合	$\xi = 0$	$\xi = 1$
(入力の数基準の場合のみ)	AND MIN(最小値)	OR MAX(最大値)

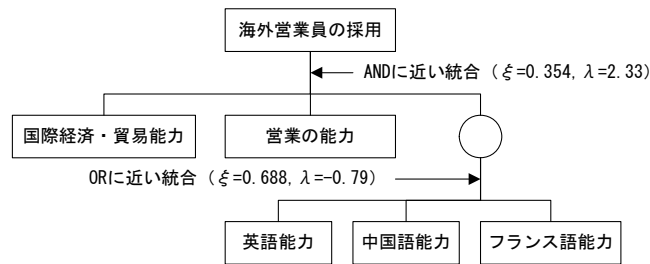


図 15: 推定した階層図

6 おわりに

ファジィ測度・ファジィ積分モデルについて概説をした．このモデルを利用する上での一助になれば幸いである．また，本解説で示した多くのモデルを計算するツールを用意した．下記の URL から利用できるようにしてあるので，活用していただければ幸いである．

<http://www.isc.senshu-u.ac.jp/%7ethc0456/>

謝辞

本稿は，2009 年度専修大学研究助成個別研究「シヨケ積分型ファジィルールによる総合評価法」の研究成果の一部である．

参考文献

- [1] M. Sugeno: *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [2] 室伏俊明: ファジィ測度を読む技術 (I) ファジィ測度の Shapley 値, 第 2 回ファジィワーク ショップ講演論文集,39-48, 長岡, 1992.
- [3] 藤本勝成: 意思決定とメビウス反転, 日本ファジィ学会誌, 10, 2, 206 - 214, 1998.
- [4] M. Grabisch: k-Order additive discrete fuzzy measures and their representation, *Fuzzy Sets and Systems*, 92, 167-189, 1999.
- [5] M. Choquet: Theory of Capacities, *Annales de l'Institut Fourier* 5, 131-295, 1954.
- [6] T. Murofushi and M. Sugeno: A Theory of fuzzy measure : representation, the Choquet integral and null sets, *J. Math. Anal. Appl.*, 159, 532-549,1991.
- [7] 高萩栄一郎, 室伏俊明: ファジィ測度の同定について, 第 5 回インテリジェント・システム・シンポジウム (FAN Symposium '95) 講演論文集 (日本ファジィ学会), 463-468, 1998.
- [8] 高萩栄一郎: 一対比較によるシヨケ積分の被積分関数 (入力値) の同定について, 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌),19, 1, 22-30, 2007.
- [9] D. Schmeidler: Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, 57, 5, 71-587, 1989 (first version: Subjective probability without additivity, working paper, The Foerder Institute for Economic Research, Tel Aviv Univ. 1982)
- [10] J. Šipoš: Integral with respect to a pre-measure, *Math. Slovaca*, 29, 141-155, 1979.
- [11] 菅野道夫, 室伏俊明: ファジィ測度, 日刊工業新聞社, 1993
- [12] 高萩栄一郎: 集計オペレータとしてのファジィ測度-シヨケ積分モデル, 日本経営数学会誌, 22, 2, 85-98, 2000.
- [13] M. Grabisch: The Choquet integral as a linear interpolator, *10th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU 2004)*, Perugia, Italy, 373-378, July 2004.
- [14] 高萩栄一郎: λ ファジィ測度とシヨケ積分を利用した中央値、平均値の中間の評価, 日本ファジィ学会, 第 11 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 435-438, 1995.
- [15] R. R. Yager: On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18, 183-190, 1988.
- [16] 荒木智行, 向殿政男: 定数係数をもったファジー論理関数について, 電子情報通信学会論文誌,D-I, J81-D-I, 9, 1037-1047, 1998.

- [17] E.Takahagi: Fuzzy Integral Based Fuzzy Switching Functions, in *Transactions on Rough Sets II. Lecture Notes in Computer Science 3135* edited by James F. Peters et al, 129-150, Springer, 2004.
- [18] 高萩栄一郎: 論理型 Choquet 積分 – その特徴と比較 –, 日本知能情報ファジィ学会 第 21 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 680-685, 2005.
- [19] 向殿政男, 「ファジィ論理 (講座ファジィ 4)」, 日刊工業新聞社, 1993.
- [20] 高萩栄一郎: ファジィルール表によるシヨケ積分型総合評価法, 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会), 21, 4, 480-490, 2009.
- [21] M. Grabisch and C. Labreuche (室伏俊明訳): 双極尺度のためのファジィ測度と積分, 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌), 16, 311-318, 2004.
- [22] M. Grabisch and Ch. Labreuche: Bi-capacities — Part I: definition, Möbius transform and interaction, *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 211-236, 2005.
- [23] M. Grabisch and Ch. Labreuche: Bi-capacities — Part II: the Choquet integral, *Fuzzy Sets and Systems*, 151, 237-259, 2005.
- [24] A. Tversky and D. Kahneman, Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, *J. of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323, 1992.
- [25] 中森義輝: 「感性データ解析 – 感性情報処理のためのファジィ数量分析手法」, 森北出版, 2000.
- [26] 成川康男: 非線形効用理論/累積プロスペクト理論, 知能と情報 (日本知能情報ファジィ学会誌), 16, 4, 296-302, 2004.
- [27] 高萩栄一郎: 重要度と λ による λ ファジィ測度の同定について, 日本ファジィ学会誌, 12, 5, 665-676, 2000.
- [28] Y. Narukawa and V. Torra, Fuzzy Measure and Probability Distributions: Distorted Probabilities, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13, 5, 617-629, 2005.
- [29] Y.Tukamoto, A Measure Theoretic Approach to Evaluation of Fuzzy Set Defined on Probability Space, *Journal of Fuzzy Math(模糊数学)*, 2, 3, 89-98, 1982.
- [30] 塚本弥八郎: 不確実性を伴う意思決定問題のファジィ測度論による分析, 講座ファジィ 14 ファジィ理論と人文社会科学, 日本ファジィ学会編, 日刊工業新聞社, 148-170, 1994.
- [31] 高萩栄一郎: ダイヤモンド型一対比較によるファジィ測度の同定 – グラビシのシヨケ積分のグラフィカル表現を用いた場合 –, 第 11 回 曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集 (CD-ROM), 2006.
- [32] E. Takahagi: A Fuzzy Measure Identification Method by Diamond Pairwise Comparisons and ϕ_s Transformation, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 7, 219-232, 2008.

高萩 栄一郎
専修大学商学部
〒 214-8580 川崎市多摩区東三田 2-1-1
E-mail: takahagi@isc.senshu-u.ac.jp