(学術論文) 日本経営数学会誌, Vol.29, No.1, pp.43-59, 2008.

理想点，満足点を含めた一対比較について

On pairwise comparisons including ideal and satisfaction points

高 萩 栄 一 郎*
Eiichiro TAKAHAGI

Abstract：
We propose a new pairwise comparison method. In many cases, the comparison words used by AHP are assigned fixed comparison values. Our experiments show that the correspondence table's parameter among the comparisons words and the comparison values change by the comparison objects. Examinees reply not only pairwise comparisons, but also ideal and satisfaction points. The method identifies the evaluation values where the ideal point's value is 1.0 and satisfaction point's is 0.7 by varying the correspondence table's parameter. Lastly, we study the properties of the identified values.

Keywords (キーワード):
Pairwise Comparison (一対比較), AHP, Rank Reversal (順位逆転), Ideal Point (理想点), Satisfaction Point (満足点), Aspiration Level (希求水準)

1 はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process)[1] は，広く普及している．その中で使われる一対比較法は，感性などの数値化しにくい対象の数値化などに使われている．一対比較は，2 項目間の良さ（重要性）を「ことば」で回答させ，それを何倍よいかの一対比較値に対応させる．この何倍よいかという一対比較値は，比率尺度と解釈し，その一対比較行列から最大固有ベクトルを求め，これをその基準の個別評価値としている．この個別評価値は，間隔尺度であることが知られている [3].

AHP では，基準間の一対比較で基準の重要度を求め，個別評価値をこの重要度で加重平均を行うことにより総合評価値を求めている．この場合，間隔の意味が，全評価基準間で同じでなくてはならない．この間隔の問題で，代替案の追加や削除により，総合評価値の順位の逆転が起こることなどの問題が起こる．臼井 [7] によれば，無関係代替案からの独立性 (IIA: independence of irrelevant alternatives) を満たさないことによるものだとしている．Schenkerman[6] は，通常の AHP で，代替案の個別評価値の和を 1 にする正規化は，基準間の重要度に影響を与えている（代替案間の一対比較と重要度は独立ではない）としている．臼井は，順位逆転を起こすことに対しての擁護論を紹介し，その擁護論に疑問を呈している．また，Dyer[4] は,「真の問題は順位逆転現象それ自体ではない．順位逆転は AHP が持つもっとずっと深刻な問題の一つの症状である：その方法論によって与えられる順位付けは恣意的である」（訳は，[7] による）と述べている．さらに，臼井は，AHP は有用であり，代替案の追加・削除に対して順位逆転を起こさないように，

* 専修大学（Senshu University）
受付：2007 年 8 月 10 日，受理：2008 年 3 月 4 日

AHP を頑健にすることが必要であろう.」と述べている．本稿は，臼井らの指摘への解決案を提案するものである．

過去に提案されたものとして，Belton と Gear[2] は，得られた固有ベクトルについて，最大値を 1 にするように正規化し，その代替案の個別評価値とする方法を提案している．Dyer[4] は，得られた固有ベクトルについて，最大値を 1，最小値を 0 にするように正規化 (固有ベクトルをアフィン変換) し，その代替案の個別評価値とする方法を提案している．田村ら [8] は，意思決定者に希求水準（以下の本稿では満足点にほぼ対応）を尋ね，その代替案の個別評価値が 1 になるように正規化している．また，Schoner ら [5] は，各基準間でそれぞれ 1 つの代替案を選び，それを ‘Linking Pins’ とし，その代替案の個別評価値を 1 にするような正規化をしている．

本稿では，満足点と理想点を尋ね，満足点の代替案の個別評価値を全評価基準で 0.7 などの個別評価値に揃え，理想点を 1.0 に揃える．これを行うために，一対比較値とそれに対応する「ことば」の対応表のパラメータを調節し，一対比較行列の固有ベクトルを正規化（定数倍）する．

提案手法は，当初ショケ積分の入力値を同定する手法として開発した [9] が，AHP の代替案間の一対比較から個別評価値を求める問題にも有効である．

2　選好順位逆転

AHP による総合評価において，代替案の追加・削除により，総合評価値の順位の逆転現象が起こることはよく知られている．たとえば，評価基準は P,Q の 2 つ，代替案は A,B,C,D の 4 つの場合 (表 1 から E を除いたもの) に代替案 E を加え 5 つにした場合 (表 1 の A〜E の部分) で AHP を行うと表 2,3 のように，代替案 A と D の間で総合評価値の順位が逆転する．なお，表 1 の一対比較行列は，評価基準 P,Q 間の重みの比は 3 : 1(重要度が $w_P = 3/4$,$w_Q = 1/4$) にしている．一対比較行列の不整合による影響を避けるため，一対比較行列は整合的 (C.I. が 0 になるように) 作成した．また，一対比較行列を整合的にするため，一部 2/5 や 10 など通常の一対比較では出現しない値を利用している．

表 1: 代替案が 5 つの場合

P	A	B	C	D	E	Q	A	B	C	D	E
A	1	1/3	1	3	1/3	A	1	2	4	2/5	2
B	3	1	3	9	1	B	1/2	1	2	1/5	1
C	1	1/3	1	3	1/3	C	1/4	1/2	1	1/10	1/2
D	1/3	1/9	1/3	1	1/9	D	5/2	5	10	1	5
E	3	1	3	9	1	E	1/2	1	2	1/5	1

表 2 の「追加前」は，表 1 の一対比較のうち，A,B,C,D の 4 つの代替案のみを使って，個別評価値を求め，総合評価値を求めたものである．表 3 は，5 つすべての代替案を使って個別評価値を求め，総合評価値を求めたものである．

表 3 で，代替案 E の基準 P の個別評価値は 0.360，基準 Q は 0.105 である．通常の AHP では，各基準の個別評価値の和を 1 に正規化するので，代替案 E の追加により A〜D の個別評価値も減少する．基準 P では平均 36%減少しているのに対して，基準 Q では平均 10.5%しか減少しない．これは，A〜D の代替案にとって，基準 P の重みが相対的に減少していることを意味してい

る．したがって，代替案 A は D に比べると，基準 P の個別評価値が相対的に大きいので，総合評価値が相対的に下落し，順位を下げている．

これは，追加する代替案により，基準 P と Q の間隔の意味が変化していることを示している．したがって，すべての基準で間隔の意味を統一することが必要である．

表 2: 順位の逆転現象 (E を除外)

	A	B	C	D
基準 P	0.188	0.563	0.188	0.063
基準 Q	0.235	0.118	0.059	0.588
総合評価値	0.199	0.451	0.155	0.194
順位	2	1	4	3

表 3: 順位の逆転現象 (E を追加)

	A	B	C	D	E
基準 P	0.120	0.360	0.120	0.040	0.360
基準 Q	0.211	0.105	0.053	0.526	0.105
総合評価値	0.143	0.296	0.103	0.162	0.296
順位	4	1	5	3	1

3　個別評価値に求められる条件

3.1　間隔尺度

個別評価値は，間隔尺度でなくてはならない．一対比較行列の固有ベクトルから求めた個別評価値は，比例尺度であることが知られている [3]．したがって，定数倍やアフィン変換した値は，間隔尺度である．

3.2　間隔の意味が全評価基準間で同じであること

個別評価値の差異，たとえば 0.1 の差異は，全評価基準間で同じ満足度の差異を表していなくてはならない．個別評価値が総合評価値へ与える影響の度合いは，評価基準間の一対比較で求めた評価基準の重要度で決定するので，評価基準間の一対比較とは独立に行われる代替案間の一対比較で求めた個別評価値の差の意味は，すべての評価基準間で同じでなくてはならない．

各評価基準の個別評価値は，合計を 1 にする正規化を行っているので，代替案を追加することにより，個別評価値は減少する．しかし，その減少は評価基準間で同じではない．

したがって，他の代替案の善し悪しや追加削除に関わらず，単位あたりの個別評価値の差異（間隔）が同じ影響になるように個別評価値を求めなくてはならない．

3.3　同じ満足であれば，同じ個別評価値の値

これは，AHP では，必ずしも必要でなく，ショケ積分の入力値として考えた場合必要である．しかし，評価基準間で，代替案の個別評価値を比較するときには必要である．ショケ積分の場合，基準間の個別評価値を減算するので，この条件が必要である．

3.4　個別評価値は，ある範囲内に収まっていること

すべての個別評価値が，ある適当な範囲に収まっていることである．通常の AHP では，合計が 1 になるように正規化しているので，$[0,1]$ に収まる．

§3.2 の間隔の意味が満たされていれば，この条件は，上記の条件とは異なり，必ずしも必要ではないとも考えられる．しかし，適度な範囲に収まっていると言うことは，上位の重みの意味を保持するのに必要な条件でないだろうか？たとえば，教育の評価で，3 科目の得点がそれぞれ，0〜100 の範囲にあるのは，意味がある．英語が特にできるからと言って，200 点を付けるのは，ルール違反ではないだろうか？もし，100 点を超える部分まで評価するのであったら，その評価法の範疇を越えているのではないだろうか？AHP では，代替案は，選択する可能性があるものから選ぶので，極端に高い個別評価値の代替案は考えにくい．

4　状況により一対比較値は異なる

AHP では，表 4 のように固定した一対比較値を使用する．しかし，状況によって，人間が使う値は異なるのではないかと考え，等比的に変化し，その公比 ($r > 1$) は，パラメータとして状況により変化すると考えた．回答値 (c_{ij}) は，公比 r のベキ乗の数値を表し，i 番目と j 番目の項目に関する一対比較のアンケートから読み取る数値である．

表 4: 「ことば」と一対比較値の対応表

「ことば」	AHP	等比	回答値 (c)
圧倒的によくない	$1/9$	$1/r^8$	-8
⋮	⋮	⋮	⋮
同じくらい	1	r^0	0
(その中間)	2	r^1	1
少しよい	3	r^2	2
⋮	⋮	⋮	⋮
圧倒的によい	9	r^8	8

4.1　実験

この実験は，[9] で行ったもので，状況により一対比較値の「ことば」と数値の対応が異なることを示している．個別評価値が既知の対象 2 つ – 日本の道州の面積 (実験 A)，関東地方の都県の面積 (実験 B) –について，一対比較を行った．対象は大学生 (被験者) で，実験 A(26 名) を行っ

た一週間後に実験 B(19 名) を行った．被験者に白地図を見せ，その面積の大小関係の一対比較を行った (図 1).

	左の項目が圧倒的に大きい	（中間）	左の項目がうんと大きい	（中間）	左の項目がかなり大きい	（中間）	左の項目が少し大きい	（中間）	左右同じくらい大きい	（中間）	右の項目が少し大きい	（中間）	右の項目がかなり大きい	（中間）	右の項目がうんと大きい	（中間）	右の項目が圧倒的に大きい	
回答値 →	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	
北海道												○						本州
北海道						○												四国
北海道								○										九州
本州	○																	四国
本州							○											九州
四国											○							九州

図 1: 一対比較の回答例

一対比較結果から回答値を読み取って集計に使う．図 1 の場合，$c_{12} = -3, c_{13} = 3, c_{14} = 1, c_{23} = 8, c_{24} = 2, c_{34} = -2$ となる．ただし，$c_{ii} = 0, \forall i$ かつ $c_{ji} = -c_{ij}, \forall i, j$ である．

4.2 最適な r

各被験者の回答から，もっとも当てはまりのよい r を求める．各被験者の回答から一対比較行列 A を求める．公比 r を使い,

$$A = \begin{pmatrix} r^{c_{11}} & r^{c_{12}} & r^{c_{13}} & r^{c_{14}} \\ r^{c_{21}} & r^{c_{22}} & r^{c_{23}} & r^{c_{24}} \\ r^{c_{31}} & r^{c_{32}} & r^{c_{33}} & r^{c_{34}} \\ r^{c_{41}} & r^{c_{42}} & r^{c_{43}} & r^{c_{44}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表す．次の手順で，最適な r を求める．たたし，真の面積の割合を $w_1^+, \ldots, w_4^+$ (ただし，$\sum w_i^+ = 1$) とする．

(1) $r(> 1)$ を適当な値 (たとえば，2) とする．

(2) 行列 A の最大固有値とその固有ベクトル $(w_1, w_2, w_3, w_4)(\sum w_i = 1)$ を求める．

(3) 真の面積の割合と固有ベクトルとの差の 2 乗和 $d(r)$ を求める．

$$d(r) = \sum_{i=1}^{4} (w_i - w_i^+)^2 \tag{2}$$

(4) $r(> 1)$ を変化させ，(2)〜(3) を繰り返し，$d(r)$ が最小になる r を求める．

この r を被験者，実験 A,B 毎に求める．

4.3　比較

図 2 は実験 A, 図 3 は実験 B について，各被験者の最適な r を求め，ヒストグラムにしたものであり，表 5 は，集計値である．

表 5: 日本地図と関東地図の r の集計値

	サンプル数	平均値	中央値	最大値	最小値	標準偏差
実験 A:日本地図 (道州)	26	1.341	1.326	1.597	1.223	0.1062
実験 B:関東地図 (都県)	19	1.172	1.159	1.375	1.094	0.0623

2 つを比較すると，道州の一対比較の r が大きい．分散を等しくないと仮定して，T 検定を行い，$P(T \leq t)$ の値を求めたところ，片側 (2.23×10^{-8})，両側 (4.45×10^{-8}) となり，有意な差があることが判明した．

道州の r の平均値 1.34 の「絶対的」に換算した $1.34^8 = 10.4$ と関東の $1.17^8 = 3.51$ を考えると，それぞれの面積の最大の差異，–道州の 12.3 倍，関東の 2.3 倍 – と関係があると考えられる．

したがって，被験者は，状況 – 特に，最大の差異 – に応じて,「ことば」と一対比較値の対応を変化させていると考えられる．

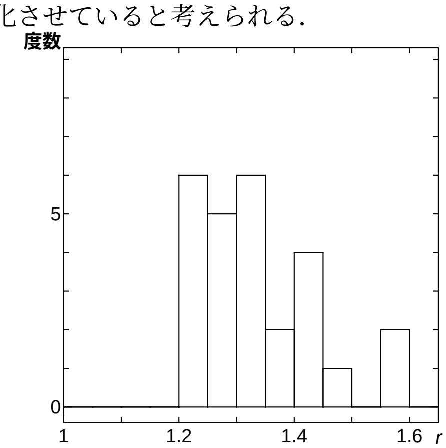

図 2: 日本地図の r の分布

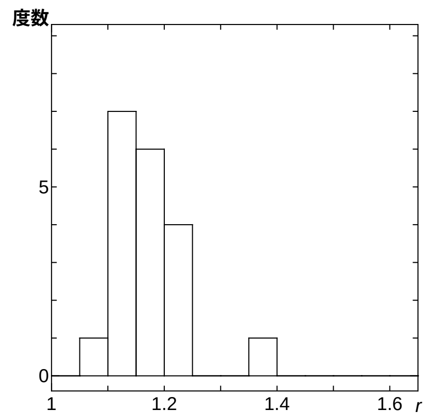

図 3: 関東の地図の r の分布

5　提案手法

5.1　理想点・満足点

代替案間の一対比較を行うとき，次の 2 点の代替案を選ぶ，もしくは，相当する仮想の代替案を追加する．

理想点 (I)　理想的な代替案．この個別評価関数の値を e_I（例えば，1.0) とするように同定する．この代替案よりよい代替案は現実的でなく，望めないような代替案とする．すべての評価基準で，理想点の満足度は同じであるように選択する．もし，選択対象の代替案に理想点の代替案がない

場合，その理想点に相当する仮想の代替案を設定する．基準毎に，一対比較の対象の項目数が異なっていても，合計を 1 にする正規化を行うような問題は生じない．

理想点の代替案は，単純にもっともよい代替案ではない．理想点よりよい代替案が AHP で 1 位ななった場合，その対象の問題の再考が必要となる．理想点よりよい代替案は，後述のようにその基準の一対比較から除いた方がよい．

たとえば，賃貸住宅の選択で，2LDK くらいが希望のとき，4LDK の物件は代替案に入らない．現実の借りたいエリアでその 4LDK の物件は，予算制約などで選択されることがあり得ないと考えられるからである．

満足点 (G)　満足できる代替案とか，最低限の条件を満たしている代替案とする．この要素の個別評価関数の値を e_G（例えば，0.7) となるように同定する．たとえば，すべての評価基準でこの満足点であれば，総合評価値はぎりぎり選択したいと思う点であるとする．もし，選択対象の代替案に満足点の代替案がない場合，その満足点に相当する仮想の代替案を設定する．

すべての評価基準で，満足点の満足度は同じであるように選択する．

5.2　一対比較値の求め方

求め方は，次の手順のように，適当な $r > 1$ からはじめ，その r で一対比較行列を作成，固有ベクトルを求め，理想点の代替案が e_I(1) になるように正規化する．このプロセスを繰り返しながら，満足点の代替案が，e_G(0.7) になるように r を調節していく．

例題は，賃貸住宅の間取りの一対比較とする．

(1) 代替案を選択する．たとえば,「1LDK」,「2DK」,「2LDK」,「3DK」とする．

(2) 満足点を設定する．たとえば,「2DK」くらいを希望するという条件であったので,「2DK」を満足点とする．

(3) 理想点を設定する．たとえば，3DK は，2DK より一部屋多く，余裕ができるので，理想的である．これよりよい間取り，たとえば 4DK は，対象のエリアでは家賃が高すぎて，選択の可能性がなく，また，2 部屋余分にあっても使用の予定が無く，無駄になってしまうので，3DK を理想点とした．

(4) 一対比較を行う．図 4 のようになったとする．

(5) 一対比較行列 A を作成する．図 4 の場合，次のようになる．

$$A = \begin{pmatrix} r^0 & r^{-4} & r^{-6} & r^{-8} \\ r^4 & r^0 & r^{-2} & r^{-4} \\ r^6 & r^2 & r^0 & r^{-3} \\ r^8 & r^4 & r^3 & r^0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

	左の項目が圧倒的によい	（中間）	左の項目がうんとよい	（中間）	左の項目がかなりよい	（中間）	左の項目が少しよい	（中間）	左右同じくらいよい	（中間）	右の項目が少しよい	（中間）	右の項目がかなりよい	（中間）	右の項目がうんとよい	（中間）	右の項目が圧倒的によい	
回答値 =>	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	
1LDK													○					2DK
1LDK															○			2LDK
1LDK																	○	3DK
2DK											○							2LDK
2DK													○					3DK
2LDK												○						3DK

図 4: 家賃の一対比較結果

(6) 適当な $r > 1$ から始める．たとえば，$r = 2$ とする．一対比較行列 A は，次のようになる．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/16 & 1/64 & 1/256 \\ 16 & 1 & 1/4 & 1/16 \\ 64 & 4 & 1 & 1/8 \\ 256 & 16 & 8 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(7) (6) の一対比較行列 A の最大固有値と固有ベクトル w を求める．例題では，

$$w = (0.0026, 0.042, 0.1429, 0.8125)$$

となる．

(8) (7) の w の理想点の個別評価値を 1 にするように正規化する (w^*)．例題では，

$$w^* = (0.0032, 0.0517, 0.1759, 1.0000)$$

となる．

(9) (8) の満足点の値 (2 番目の 0.0517) と満足点の目標値 0.7 と比べる．目標値の値の方が大きいので，r の値を減少させる．

(10) r を 1.5 にし，(6)〜(8) のプロセスを繰り返すと満足点の値は，0.1755 になる．r を減少させる．

(11) r を 1.05 にし，(6)〜(8) のプロセスを繰り返すと満足点の値は，0.8127 になる．r を増大させる．

(12) r を調整していき，$r = 1.0873$ のとき，満足点の値は 0.704 と，おおよそ 0.7 になり，この手順を終了する．この場合の各個別評価値は，表 6 のようになる．

表 6: 間取りの一対比較の同定例

間取り	1LDK	2DK (満足点)	2LDK	3DK (理想点)
個別評価値	0.5011	0.7004	0.8111	1.0000

5.3 求めた個別評価値が持つ性質

§3.1 の「間隔尺度であること」は，一対比較行列の固有ベクトルを定数倍したことにより満たされる．§3.2 の「間隔の意味が全評価基準で揃っているか？」は，満足点と理想点での満足度が全評価基準で揃っている．したがって，満足点と理想点の差異も全評価基準で同じである．したがって，間隔尺度であるので全評価基準で間隔に意味が揃っている．§3.3 の「同じ満足であれば，同じ個別評価値の値」は，すべての評価基準で満足点と理想点の満足度は同じであり，間隔尺度であるのでこれも満たしている．§3.4 の「個別評価値は，ある範囲に収まっていること」は，理想点を 1 とし，理想点よりよい代替案がないとしたら，この条件は満たされる．すなわち，理想点以上の代替案はおかしな代替案と考え，代替案に含まなければ満たされる．

6 従来の解決法

代替案のうち，一つの代替案の個別評価値を 1 などに固定することにより，一対比較行列が整合的であれば，代替案の追加により，選好順位の逆転は起こらない．そこで，もっとも良い代替案や希求水準の代替案の個別評価値を固定してきた．これらを比較するために，各計算結果を表 7 に示す．

表 7: 間取りの一対比較の同定例 (比較)

間取り	1LDK	2DK (満足点) (希求水準)	2LDK	3DK (理想点)
AHP	0.0387	0.1218	0.2429	0.5965
最大値を 1	0.0650	0.2042	0.4073	1.0000
希求水準	0.3181	1.0000	1.9943	4.8969
最小値 0 最大値 1	0.0000	0.1489	0.3661	1.0000
提案手法	0.5011	0.7004	0.8111	1.0000

6.1 最大値を 1 にする方式

この方式 [2] は，一対比較行列から求めた固有ベクトルの要素の最大値を 1 にするように正規化したものである．この方式では，最大値になるような代替案を追加しなければ順位逆転現象は起こりにくい．最大値の満足度は，全評価基準で揃っていないので，§3.2, §3.3 は満たさない．最大値から同じ何倍であっても，その差異の意味は評価基準によって異なるからである．

しかし，最大値を理想点と考え全評価基準でその満足度が同じであり，かつ 一対比較値が状況に依存しなければ，§3.2,§3.3 を満たす．また，§3.4 も満たす．

しかし，最大値の代替案が追加されると順位の逆転がよく起こる．表 8 は，2 基準 (P,B)，4 代替案 (A,B,C,D）の一対比較の例（整合的）で，代替案 D を追加前と追加後では A,B,C の順位が異なる．これは，基準 P で代替案 D の個別評価値が最大になり，代替案 C の基準 P の個別評価値が相対的に小さくなったためである．

表 8: 最大値を 1 にする方法の順位逆転例 (一対比較)

基準 P	A	B	C	D	基準 Q	A	B	C	D
A	1	2	1/3	0.2	A	1	4/5	4	20/3
B	0.5	1	1/6	0.1	B	5/4	1	5	25/3
C	3	6	1	0.6	C	1/4	1/5	1	5/3
D	5	10	5/3	1	D	3/20	3/25	3/5	1

表 9: 最大値を 1 にする方法の順位逆転例 (順位の計算)

D なし	A	B	C	D あり	A	B	C	D
P	0.333	0.167	1.000	P	0.200	0.100	0.600	1.000
Q	0.800	1.000	0.200	Q	0.800	1.000	0.200	0.120
総合評価値	0.567	0.583	0.600	総合評価値	0.500	0.550	0.400	0.560
順位	3	2	1	順位	3	2	4	1

6.2 希求水準方式

希求水準方式 [8] は，被験者にその基準での希求水準を聞き，その希求水準の代替案を一対比較対象に含め一対比較を行う．一対比較行列の固有ベクトルを希求水準の代替案の個別評価値が 1.0 になるように正規化する．

すべての基準で希求水準の選好度合いが等しく，かつ，一対比較値が表す比率が状況に依存しなければ，すべての評価基準の間隔は同じ意味になり，§3.2,§3.3 を満たす．しかし，§3.4 は満たさない．

最大値を 1 にする方法と比べるとよりよい．理由は，実際に選択する代替案は，希求水準付近の代替案であり，希求水準の満足度を全評価基準で揃えているので，その付近の代替案の値の信頼性が高くなるからである．

この方式は，一対比較の「ことば」と一対比較値の対応表が正しく，また，対象によらず一定であるという前提に基づいている．しかし，状況により一対比較値の意味を変化させることも多い．表 10〜12 は，3 基準 P,Q,R(等重み，各 1/3 の重要度) で，3 つの代替案 (A,B,C) とそれに 1 つの代替案が追加され，基準 P の一対比較が改訂され，順位が逆転する例である．なお，代替案 C がすべての評価基準で希求水準とする．

表 10 は，基準 P で特によくない代替案を追加した例である．A が B に比べて「圧倒的によい」であったが，D を追加したとき，A と D の差がさらに大きく，A が D より「圧倒的によい」とし，そのため，A が B に比べて「うんとよい」に改訂した．それに合わせて A と C の一対比較

表 10: 評価基準 P で代替案 ABC の一対比較と ABCD の一対比較

P (D を追加前)	A	B	C	P (D を追加後)	A	B	C	D
A	1	9	2	A	1	7	1	9
B	1/9	1	1/2	B	1/7	1	1/2	7
C	1/2	2	1	C	1	2	1	5
				D	1/9	1/7	1/5	1

値も改訂した．表 11 は，評価基準 Q,R についての ABCD 間の一対比較である．ABC だけの場合は，一対比較行列の ABC に関する部分のみを利用する．

表 11: 評価基準 Q,R についての ABCD 間の一対比較

Q	A	B	C	D	R	A	B	C	D
A	1	1/6	1/2	1	A	1	6	3	7
B	6	1	7	9	B	1/6	1	1	2
C	2	1/7	1	2	C	1/3	1	1	2
D	1	1/9	1/2	1	D	1/7	1/2	1/2	1

表 12: 希求水準方式での順位逆転の例（一対比較値の改訂）

追加前	A	B	C	追加後	A	B	C	D
P	2.621	0.382	1.000	P	1.697	0.502	1.000	0.136
Q	0.663	5.278	1.000	Q	0.620	5.106	1.000	0.550
R	3.780	0.794	1.000	R	3.745	0.846	1.000	0.478
総合評価値	2.355	2.151	1.000	総合評価値	2.020	2.151	1.000	0.388
順位	1	2	3	順位	2	1	3	4

表 12 のように，基準 P 間の一対比較の（わずかな）改訂により，順位の逆転が起こる．基準 P の代替案 A の個別評価値は，0.92 減少し，B が 0.12 増大したためである．通常の AHP（表 13）や提案手法（表 14）では，順位の逆転は起こらない．これは，希求水準より良い代替案の個別評価値が，希求水準よりどれくらい良いかということに対して，わずかな差異（たとえば「圧倒的に」と「うんと」の差異）で，大きく個別評価値を変化させるからである．これを防ぐには，提案手法のように，理想点と満足点（希求水準）を固定しておく必要がある．

表 13: 表 12 を通常の AHP で行った場合（追加後は一対比較値の改訂有）

追加前	A	B	C	追加後	A	B	C	D
P	0.655	0.095	0.250	P	0.509	0.150	0.300	0.041
Q	0.096	0.760	0.144	Q	0.085	0.702	0.137	0.076
R	0.678	0.142	0.179	R	0.617	0.139	0.165	0.079
総合評価値	0.476	0.333	0.191	総合評価値	0.404	0.331	0.201	0.065
順位	1	2	3	順位	1	2	3	4

表 14: 表 12 を提案手法で行った場合（追加後は一対比較値の改訂有）

追加前	A	B	C	追加後	A	B	C	D
P	1.000	0.490	0.700	P	1.000	0.551	0.700	0.281
Q	0.685	1.000	0.700	Q	0.679	1.000	0.700	0.648
R	1.000	0.622	0.700	R	1.000	0.646	0.700	0.584
総合評価値	0.895	0.704	0.700	総合評価値	0.893	0.732	0.700	0.504
順位	1	2	3	順位	1	2	3	4

6.3　最大値を 1，最小値を 0 に正規化する方式

この方式 [4] は，得られた固有ベクトルの最大値を 1，最小値を 0 に線形変換を行うものである．この方式では，最大値が理想点とすれば，理想点の満足度は 1 で揃うが，線形変換を行っているので，比率尺度は保っていない．したがって，間隔の意味は同じにならず，§3.2,§3.3 は満たさない．

6.4　何を重要視するか？（「ことば」と一対比較値の対応表 VS 理想点と満足点の差異）

希求水準や最大値（理想点）を 1 とする方式は,「ことば」と一対比較値の対応を固定し，それが（ほぼ）正しければ，求めた個別評価値もよい性質を持つ．

提案手法は，理想点と満足点の差を一定にするように個別評価値を求めるもので,「ことば」と一対比較値の対応を可変にしている．これは，満足点，理想点付近の代替案の個別評価値を安定させようとする方法である．理想点，満足点の選択をうまく行うことができれば，一対比較に多少ぶれがあっても，個別評価値は信頼できると思われる．

理想点，満足点を選択するという手間は増えるが，個別評価値が異常な値になることは減少するだろう．

7　比率尺度の問題

AHP の一対比較では，比率尺度が仮定されている．2 つの項目を一対比較したとき，回答する「ことば」は，片方の項目がもう片方の項目に対して，何倍重要か（よいか）を示しているかとして解釈される．この方法は，希求水準を利用する方法や最大値を 1 にする方法でも同様で，さらに，本提案手法でもほぼ同様である．提案手法は,「ことば」と一対比較値の対応表を可変にしているのであって，何倍重要かという比率尺度であることには変わりない．

比率尺度であるとき，同じ「ことば」の差異であっても，よりよい評価対象に有利に作用する．3 項目 A,B,C の一対比較で，A を基準（たとえば，希求水準や満足点の代替案），B を A に比べ「少しよい」(3 倍よい）代替案，C を A に比べて「少し悪い」(1/3 倍よい）とし，整合的な回答で，B は C より 9 倍よい代替案とする．B の代替案の個別評価値を 1 に基準化すると $w_A = 3$,$w_B = 1$,$w_C = 1/3$ となる．A と B の個別評価値差異は，$w_A - w_B = 2$ で，A と C は，$w_B - w_C = 0.667$ となり，3 倍，A と B の個別評価値差異が大きい．総合評価値は，加重和であ

るので，よい方の代替案 (B) の影響が大きくなる．A が B に改善した場合と A が C に下がった場合を比較すると，改善した場合の方が 3 倍影響が大きい．この影響度の差異は，合計を 1 に正規化した場合や提案手法など定数倍をして正規化する場合に同様に存在する．

一般に，ある変化 – α 倍の改善と $1/\alpha$ への減少，ただし，$\alpha > 1$ – を考えた場合，α 倍への変化のほうが影響が大きい．なぜなら，$\alpha > 1$ のとき，希求水準 (1) から α 倍の改善分 $\alpha - 1$ と $1/\alpha$ への減少分 $1 - 1/\alpha$ を比べた場合，$(\alpha - 1) > (1 - 1/\alpha)$ となり，改善分が常に上回る．したがって，比率尺度を仮定する限り，この問題は避けられない．

しかし，和を 1 に正規化する通常の AHP では，この作用を緩和することがある．影響の大きい特によい代替案の個別評価値を引き下げる効果があるからである．

表 15: 比率尺度の問題（代替案間の一対比較）

P	A	B	C	Q	A	B	C	R	A	B	C
A	1	5	4	A	1	1/5	1/7	A	1	1/5	1/7
B	1/5	1	1/2	B	5	1	1/2	B	5	1	1/2
C	1/4	2	1	C	7	2	1	C	7	2	1

例として，基準は，P,Q,R の 3 基準，代替案は A,B,C の 3 代替案とし，基準間の重要度は等重み (各 $1/3$）を考える．表 15 の一対比較行列を用い，代替案 B は，すべての基準で希求水準の代替案とする．代替案 A は，基準 P で B に比べて「うんととかなり」の中間くらいよく」，他の 2 基準では,「うんととかなりの中間くらい悪い」とする．C は，B に比べて，すべての基準で「少しと同じくらいの中間くらいよい」とし，一対比較は，ほぼ整合的とした（各一対比較表の整合度 C.I. は 0.02 未満）．表 15 は，その一対比較行列で，基準 Q と R は全く同じとした．

総合評価値で A と B を比べたとき，等重みかつ同じ程度で，2 基準で B が優れており，1 基準で A が優れているので，A と B を比べたとき，B が優れているとなるのが妥当であろう ($A \prec B$)．また，すべての基準で B より C が優れているので，$A \prec B \prec C$ が妥当であろう．

表 16: 比率尺度の問題（希求水準と通常の AHP）

希求水準	A	B	C	通常の AHP	A	B	C
P	5.848	1.000	1.710	P	0.683	0.117	0.200
Q	0.225	1.000	1.776	Q	0.075	0.333	0.592
R	0.225	1.000	1.776	R	0.075	0.333	0.592
総合評価値	2.100	1.000	1.754	総合評価値	0.278	0.261	0.461
順位	1	3	2	順位	2	3	1

表 16 は，希求水準方式と通常の AHP における総合評価値の計算である．希求水準方式では，$B \prec C \prec A$ となり，A が 1 位になっている．この原因は，基準 P の A の個別評価値が 5.848 と極めて大きいことによるだろう．基準 P の A と B の個別評価値の差異は 4.848 と B と C との 0.710 と比べて約 4.1 大きい．

通常の AHP では，$B \prec A \prec C$ となり，C が 1 位になっている．通常の AHP では，合計を 1 に正規化するので，たとえ 1 つだけよくてもその影響は多少削減される．基準 P の A と B の個別評価値の差異は 0.566 と B と C との 0.083 と比べて 0.48 大きいにとどまっている．

表 17(左) は，提案手法の総合評価値の計算で，代替案 B をすべての基準での満足点，C をす

表 17: 比率尺度の問題 (提案手法)

C を理想点	A	B	C	P で A を理想点	A	B	C
P	2.916	0.700	1.000	P	1.000	0.700	0.765
Q	0.220	0.700	1.000	Q	0.220	0.700	1.000
R	0.220	0.700	1.000	R	0.220	0.700	1.000
総合評価値	1.118	0.700	1.000	総合評価値	0.480	0.700	0.922
順位	1	3	2	順位	3	2	1

べての基準での理想点とし，満足点を 0.7 にしたものである．希求水準方式と同様，$B \prec C \prec A$ となり，A が 1 位になっている．理想点と満足点を揃えるため，r を小さくしている．希求水準方式に比べると，多少 A と B の総合評価値の差異は縮まっているが，A が 1 位であることには変わりない．差異を縮めるために，満足点の値 (e_G) を 0.8 にすれば，$B \prec A \prec C$ となり，0.9 にすれば $A \prec B \prec C$ になるが，本質的な改善にはなっていない．

提案手法での問題点は，理想点の代替案よりよい代替案が存在することである．提案手法では，理想点と満足点を揃えているので，その間，付近の個別評価値の信頼性は高いが，それ以外の代替案の個別評価値は信頼性は低い．代替案 A は，基準 P だけ特によく，他は特に悪い代替案である．通常の代替案の選択は，すべての基準で希求水準付近以上の代替案が選ばれ，その中から AHP で最終的な代替案を選択する．この A は，選択される可能性がない代替案として最初から除外すべきものであったのかもしれない．たとえば，賃貸住宅の選択の例で，7LDK などの理想以上の間取りだが，家賃予算の数倍で，交通の便もよくないといった代替案である．

したがって，理想点よりかなりよい代替案がある場合，除外するのなどの対策が（通常の AHP や希求水準方式と同様に）必要である．

もし，代替案が理想点をかなり超える代替案でなければ問題ない．基準 P で代替案 A を理想点とすれば，提案手法では，満足点の値 0.7 で，$A \prec B \prec C$ となる（表 17 右).

したがって，比率尺度の問題は，希求点方式でもっとも影響が大きい．通常の AHP では，合計を 1 にするという正規化を行っているので，影響は少ない．また，提案手法でも，理想点よりよい代替案を含めなければ，影響は小さくなる．

8　おわりに・残された課題

理想点，満足点を指定して一対比較を行う方法を示し，希求水準方式などと比較をした (表 18).

8.1　繰り返し計算

r を求めるためには，§5.2 で示したように，r を試行錯誤的に変化させて，満足点の重みが満足値に等しくなるように調整していく繰り返しの計算が必要である．

未証明ではあるが，$r > 1$ の増減と §5.2 での満足点の値は，単調性があると推測される（例外は発見していない）．したがって，コンピュータの 2 分検索などのアルゴリズムを使えば，効率的に近似値を求めることができる．計算時間は，表計算のマクロで計算しても，最近の PC では瞬時で計算できる．

表 18: 各手法の比較

手法	間隔尺度 §3.1	間隔の意味 §3.2	同じ満足度 §3.3	範囲 §3.4	比率尺度の問題 §7
通常の AHP	○	×	×	○	×
最大値を 1 に	○	△ *1	△ *1	○	×
最大値を 1 最小値を 0	○	×	×	○	×
希求水準を 1 に	○	△ *2	△ *2	×	×
提案手法	○	○	○	△ *3	×

*1: もっとも良い代替案を理想点とみなせ，ことばと一対比較値の対応表が固定であると仮定すれば成立

*2: ことばと一対比較値の対応表が固定であると仮定すれば成立

*3: 理想点よりよい代替案を含めないときに成立

しかし，AHP での幾何平均法など，電卓を使った手計算では求めることは現在できない．今後，計算システムなどを公開していきたい．

8.2　基準間の一対比較をどうするか？

代替案間の一対比較では，理想点，満足点の代替案を指定して，その一対比較の r を求めることができた．しかし，基準間の一対比較の場合，代替案間とは異なり，適合する r を求める方法は未開発であるが，次のようなことが考えられる．

重要度を 1 つ与える ある 1 つ評価基準の重要度を与えることにより，評価基準間の一対比較から r を求めることができる．たとえば，最重要とした評価基準の重みを一対比較と同時に回答してもらうことにより同定できる．その評価基準を k とし，その値を w^* とすると，次の手順で求めることができる．評価基準間の重要度の場合，重要度の和が 1 という制約 ($\sum_i w_i = 1$) があるので，§4.2 と同様に，適当な $r > 1$ から始め，一対比較行列を作成し，各 w_i を求め，$w_k = w^*$ となるように r を調節する．

この方法で評価基準間の一対比較の r を求めることができるが，1 つの評価基準の重要度を与えなくてはならないという欠点を持つ．

デフォルトの r を使う 代替案間の一対比較で同定した r の（幾何）平均値を用いる．何らかの方法で一般的な r を求めるなど，何らかの r をあらかじめ設定しておくことが考えられる．

8.3　理想点・満足点の設定

理想点，満足点を適切に選択することができるだろうか？

満足点は，希求水準と考え，その水準以下では，その代替案の選択が難しい点とした．そのような点の代替案をあらかじめ提供された代替案のなかからから選択したり，仮想的に追加したりするとした．そのような代替案をうまく選択することができるだろうか？提案手法では，そのような代替案を選択する手法を提供していない．

同様に，理想点についてもうまく代替案を選択する手法を提供していない．また,「理想」をどのような水準に置くのか，基準が異なった場合，満足点より難しい面がある．

また，理想点・満足点を決定し，一対比較による順位が定まれば，個別評価値はほぼ決まってしまう．一対比較は，個別評価値をより精密にすることにとどまる．

満足点（希求水準）以下の個別評価値の代替案は選択されにくいという指摘がある．たとえば，2 基準等重みで，代替案 A は 2 基準とも希求水準 (0.7,0.7)，代替案 B は，0.8 と 0.6 としたとき，A の方がよいという考え方である．これは，商品などの選択などで,「悪い点がない」とか「気にくわない点がない」ということを重要視する考え方である．解決法としては，評価項目間の相互作用を考え，優加法的なファジィ測度でのファジィ積分にする方法や，満足点未満であることを低く評価する加重和とは別の評価法を利用する必要がある．

8.4　恣意性

理想点や満足点を設けることにより，恣意性が増大するという解釈も考えられる．著者は，提案した手法で表 4 の『「ことば」と一対比較値の対応表』の数値を可変にしたことにより，AHP の「ことば」と一対比較値の対応がデフォルトで決められた値という恣意性を若干減少させていると考えている．したがって，著者は恣意性について，増大しているとは考えていない．

§8.3 で述べたように，理想点や満足点の設定は難しい．今後の課題として，より客観的に理想点，満足点を設定する手法を開発する必要がある．

参考文献

[1] Saaty, T. L.: The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill (1980).

[2] Belton, A. and T. Gear: On a Short-coming of Saaty’s Method of Analytic Hierarchies, *OMEGA The International Journal of Management Science*, pp.37-3, 228-230 (1983).

[3] Harker, P. T. and L.G.Vargas: The theory of ratio estimation: Saaty’s analytic hierarchy process, *Management Science*, 33, pp.1383-1403 (1987).

[4] Dyer, J. S.: Remarks on the Analytic Hierarchy Process, *Management Science*, 36-3, pp.249-258 (1990).

[5] Schoner, B, W. C. Wedley and E. U. Choo: A Unifield Approach to AHP with Linking Pins, *European Journal of Operational Research*, 64, pp.384-392 (1993).

[6] Schenkerman, S: Avoiding Rank Reversal in AHP Decision-Support Models, *European Journal of Operational Research*, 74, pp.407-419 (1994).

[7] 臼井功: AHP における順位逆転について, 横浜経営研究, 第 18 巻 2 号, pp.83-98 (1997).

[8] 田村担之，高橋理，鳩野逸生，馬野元秀: 階層化意思決定法 (AHP) の記述的モデルの提案と選好順位逆転現象の整合的解釈, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42-2, pp.214-228 (1998).

[9] 高萩栄一郎: 一対比較によるショケ積分の被積分関数 (入力値) の同定について, 知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌),Vol.19, No.1,pp.22-30 (2007).

高萩　栄一郎
専修大学商学部
〒 214-8580 川崎市多摩区東三田 2–1–1
E-mail: takahagi@isc.senshu-u.ac.jp