

空間経済と生産過程*

中島 巖**

〈要約〉

2次元空間における連続フローが立地位置座標の連続関数となる方向と規模(密度)をもつ連続ベクトル場になる, 資本, 労働, 土地を要素とする生産活動が展開される連続空間市場モデルが想定される。

モデルには, 生産物価格, 資本賃料, 賃金率, そして地代の4つの価格が存在し, それらの要素のうち, 資本と土地は移動不能と想定される。そこでの効率性は, 各フローが輸送費用を最小化する経路を採用するとする仮定によって実現される。問題が変分問題として定式化されるところで, 解の体系は Euler 方程式のそれによって構成される。

まず, Euler 方程式として導かれる解が数量的変数の間の関係として定義する発散法則, 貨幣的変数の間のそれとして定義する勾配法則によって空間市場の均衡価格体系が決定されてくる過程が確かめられる。

次に, 発散法則, 勾配法則が構成されるに際して措定された輸送費用最小化問題に対して双対関係に立つ価値生産物(利潤)最大化の問題が対応することが確かめられ, さらに, 両法則から構成される市場均衡の安定性が確かめられる。

生産過程における収穫逓増性の下で, 土地利用度の拡大が招く規模の経済の一方的増加を示唆する Marshall 問題に対しては, 土地利用度の拡大にともなう輸送・通信費の上昇, 追加的労働者の収容施設の増設にともなう建設費用の上昇という間接費用の拡大化が一種の抑止力となって規模の経済に対する限界を画し, アノマリーな経済的均衡が導かれる余地は除かれ, Marshall 問題が回避される可能性が確かめられる。

JEL 区分: R11, R12

キーワード: 変分問題, 双対性, 収穫逓増性

* 筆者は, 立教大学図書館の好誼に負う。記して感謝いたしたい。

** 専修大学名誉教授

序

消費活動であれ、生産活動であれ、その活動拠点となる地域性が立地条件として、その活動や評価に影響を及ぼすとき、経済活動は空間的に拡張されたとみなし得るならば、そこでの空間は経済空間 (economic space) となり、経済活動は、空間消費的 (space consuming) となり、空間経済 (spatial economy) を構成する。経済活動それ自体、空間とは無関係とみなされる中、空間の特定の個所に集中化する。経済活動が空間消費的であると考えれば、合点が行く。無関係として空間を捨象して立論を重ねてきた伝統的経済学の姿が垣間見えてくる。

活動に対する空間的接近法は、既に、19世紀に Launhardt が先鞭をつけているごとくである。大戦前には、von Thünen, Weber, Palander 等によって、ドイツ語による立地論が展開された。しかるに、1942年に、Kantorovich (Канторович) [7] は、所定の輸送計画を最小費用で実現化する方法を線型計画法 (linear programming) によって定式化する試みを発表した。1949年には、Koopmans [8] が輸送システムの最適利用をめぐる議論を展開した。

1950年代に入って、Beckmann [1], [2] は、輸送問題を2次元空間における連続フロー・モデルの枠組の中で議論した。そこでのフローは、立地点を座標点ととらえ、その立地座標の連続関数である方向と規模(広さ)をもつ連続ベクトル場で表わされる。

伝統的経済学は、空間の立地条件が、経済変数、パラメータに影響を及ぼすことのない等質的空間 (homogeneous space) を前提としており、それは非等質的空間を扱う空間経済学の特殊ケースと位置づけられるかもしれない。

本稿における我々の目的は、生産活動を伴う空間経済の効率性を伝統的経済学との対比の中で、展望的に検討することにある。

まず、次節では、生産活動の特定化がなされた後、輸送費用最小化の問題が定式化され、効率性条件、すなわち発散法則と勾配法則が導かれる。第2節では、輸送費用最小化問題と価値生産物(利潤)最大化問題の間の双対関係が確かめられ、次いで、上で導かれた均衡体系の安定性が確かめられる。第3節では、生産過程における規模に関する収穫性が検討され、収穫逓増性に対し空間経済からの抑止力が働く可能性が議論される。

最後に、生産過程を伴う空間経済の効率性に関する若干の展望的な結論的言及がなされる筈である。

なお、本稿は最終稿ではない。

第1節 空間経済における生産過程

1. 発散法則

本節では、生産活動を含む空間経済の基本モデルを概観する。

本項では、生産過程を規定する。

いま、想定する代表的地区を R で表わそう。 R はユークリッド空間のコンパクト、かつ連結的 (connected) な部分空間であるものとする。さらに、その境界 (boundary) を ∂R で表わし、部分空間の任意の点は、カルテシアン座標 (Cartesian coordinates) (x_1, x_2) の点として特定される。

さて、生産可能性は、立地点から独立であり、Cobb=Douglas 型の生産技術で表わされるものとする。すなわち、すべての地区に共通する同一の生産函数

$$Q = bK^\alpha L^\beta M^\gamma \quad (1)$$

が適用される。(1)式は、伝統的な資本 K 、労働 L 、加えて土地 M の3生産要素から同質な生産物 Q が生産されることを意味する。ただし、 b は生産効率係数で、立地点に依存しないものとする。

ここで、(1)式の両辺を M で除し、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ と仮定すれば

$$q = bk^\alpha l^\beta \quad (2)$$

がしたがう。ただし、 $q = Q/M$ 、 $k = K/M$ 、 $l = L/M$ で、それぞれ産出量、資本量、労働量の地区(面積)当たりの密度 (areal densities) を表わす。

しかるに、かかる経済には、4つの価格、すなわち、生産物価格 p 、資本賃料 r 、賃金率 w 、そして地代 g が存在する。資本は、生産拠点に投下されると、少なくとも短期的には、土地同様に、移動不能な非流動的の生産要素となる。これに対して、労働、生産物は移動可能であり、生産物価格、賃金率は地域にまたがって変動すると考えられる。

ところで、空間経済に輸送の可能性を規定する輸送体系 (transportation possibilities system) が存在すれば、賃金率、生産物価格の空間的構造は、輸送費用 (transportation costs) で決定されてくる勾配 (gradient) を表示する。長期的蓄積過程においては移転可能であるかもしれない資本の均衡条件としての資本賃料は、当座、一定とみなすものとする。他方、土地地代 (land rent) は、生産過程における土地利用からの利益度から最終的に残余として決定される。

さて、地区生産主体の利潤 π は、

$$\pi = p \cdot q - bk^\alpha l^\beta - rk - wl \quad (3)$$

で定義される。

資本と労働の最適投入量が満たすべき1階条件は、それぞれ

$$p \frac{b\alpha k^{\alpha-1} l^\beta}{k} r = 0 \quad (4)$$

$$\text{or } \alpha \frac{q}{k} = \frac{r}{p} \quad (5)$$

$$p \frac{b\beta k^\alpha l^{\beta-1}}{l} w = 0 \quad (6)$$

$$\text{or } \beta \frac{q}{l} = \frac{w}{p} \quad (7)$$

で与えられる。このとき、残余としての土地収益分は、

$$p \cdot q - rk - wl = (1 - \alpha - \beta) p \cdot q = \gamma p \cdot q \quad (8)$$

で表わされ、単位土地区域の収益分としての土地地代 g に等しく、

$$\gamma z = \frac{g}{p} \quad (9)$$

がしたがう。ここで、(5)、(7)かつ(9)式を(2)式に代入すれば

$$b\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}p = r^{\alpha}w^{\beta}g^{\gamma} \quad (10)$$

を得る。(10)式は、生産が何処でも展開されると仮定するとき、上の4つの価格を相互関連させる条件式となる。しかるに、このとき、単位土地区域(面積)当たりの生産の密度が、労働集約的ないし資本集約的な生産方式の選択と同様に立地点に依存する可能性も排除されず、もし、 p と w が輸送費用に応じた空間的構造をもち、また、 r は立地点から独立であるとするれば、(10)式から、すべての地域で地代 g が決定されてくる。

いま、ある立地点において、 p, r, w, g の価格構造が所与であるとするれば、(5)、(7)、(9)式から、生産物供給密度、資本密度、労働サービス需要密度が完全に決定されてくる。資本は、使用される地点に投下されるから、すべての地点で、需要と供給が均等化されるのに対し、輸送可能な生産物、労働サービスに対しては、労働者-消費者の居住-立地パターンに依存する生産物と労働に関する空間的需要密度 q' 、同じく供給密度 l' を想定し得る。このパターンは、所与とみなし得るから、2つの超過供給密度(excess-supply densities)、 $q - q'$ と $l' - l$ を議論の対象とし得る。

ところで、Beckmann [1],[2]は、そこで導入した連続モデルにしたがって、輸送可能な生産物と労働サービスのフロー(flows)をベクトル場(vector fields)とみなし、立地座標(location coordinates) (x_1, x_2) の下で¹⁾

$$q = [q_1(x_1, x_2), q_2(x_1, x_2)] \quad (11)$$

$$l = [l_1(x_1, x_2), l_2(x_1, x_2)] \quad (12)$$

と表わした。このとき、ベクトル場の方向は、フローが取る方向となり、ユークリッド・ノルム(euclidean norm) $|q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ 、 $|l| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ は、フローとしての生産物、労働サービスのフロー量(flow volumes)ないし密度(intensities)を表わす。一般に、ベクトル ϕ の正規化された単位ベクトル $\phi/|\phi|$ は、

$$\frac{\phi}{|\phi|} = (\cos\theta, \sin\theta) \quad (13)$$

で表わされ、フローの方向を示す。(図-1参照。)

以下では、記号法の煩雑化を回避すべく、生産物、労働をインデックス $i = q, l$ で表記することにする。

まず、生産物、労働の局地的移動費用を

$$f^i(x_1, x_2, \theta^i) = f^i(x_1, x_2) = k^i f(x_1, x_2) \quad (14)$$

で表わそう。このとき、費用は移動の方向 $\theta^i (i = q, l)$ に依存しない等方性(isotropy)が仮定され、さらに、すべての発送は、同一の輸送体系を使用し、したがって、 $k^i (i = q, l)$ は空間において定数

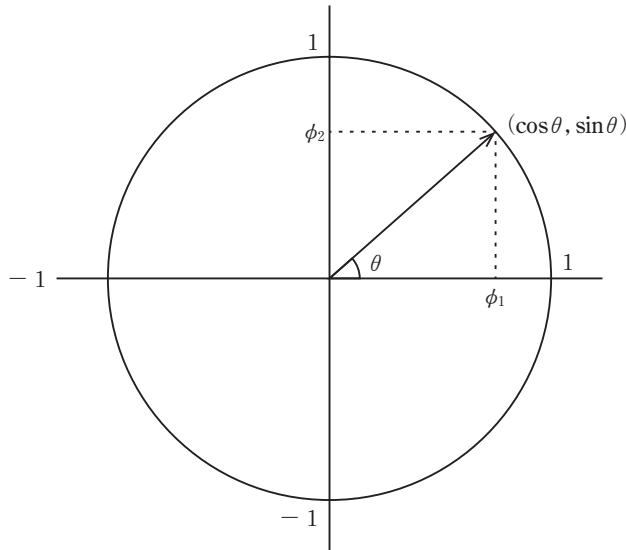


図-1

となることが想定されている。

ここで、ベクトル場 $\phi^i = [\phi_1^i(x_1, x_2), \phi_2^i(x_1, x_2)]$ ($i = q, l$) に対し、発散 (divergence)

$$\operatorname{div} \phi^i = \partial \phi_1^i / \partial x_1 + \partial \phi_2^i / \partial x_2, \quad i = q, l \quad (15)$$

が定義される。

さて、 $S \subset R$ なる領域 S からの純流出は、超過生産 (超過労働) に等しくなければならない。ここで、 S の境界を ∂S 、その線分を dS 、かつ、境界 S に対する外向き法線の方向の成分を ϕ_n で表わせば、

$$\int_{\partial S} \phi_n^i(x_1, x_2) ds = \iint_S q^i(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (16)$$

がしたがう。ただし、 $q^i(x_1, x_2)$ は超過供給を表わす。さらに、Gauss の積分定理 (Gauss's integral theorem) を点 (x_1, x_2) の近傍に適用すれば、

$$\int_{\partial S} \phi_n^i(x_1, x_2) ds = \iint_S \operatorname{div}(\phi^i(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 \quad (17)$$

がしたがう。(17) 式の関係は、 S の部分領域上においても成立するから

$$\operatorname{div}(\phi^i(x_1, x_2)) = q^i(x_1, x_2) \quad (i = q, l) \quad (18)$$

がしたがう。(18) 式の関係は、発散法則 (divergence law) と呼ばれる。また、流体力学においては、連続性方程式 (equation of continuity) として知られ、右辺は、源点力の密度 (density of source strength) を示している。我々の上での記号法にしたえば、(18) 式は、

$$\operatorname{div} q = q - q' \quad (19)$$

$$\operatorname{div} l = l' - l \quad (20)$$

で表わされ、フローと局地的超過供給とを関係づけており、源点と沈点の分布、すなわち、(19)、(20)式によって特定された超過供給に加えて、境界 ∂S 上のフロー q, l が知れば、フローは領域内で一意に決定される。

2. 勾配法則

本項では、生産過程を含む空間経済の効率性をみる。

前項において、生産物、労働の超過供給は立地点 (x_1, x_2) の函数 $q^i(x_1, x_2)$ ($i = q, l$) で表わされ、超過供給が発散に均等化する発散法則が導かれた。このとき、領域 S において

$$\iint_S q^i(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \quad (21)$$

が成り立つとき、いずれの地域においても局地的に

$$q^i(x_1, x_2) \equiv 0 \quad (22)$$

が成立する。(21)式は、空間市場の数量的変数の間の均衡条件を構成する。

ところで、いかなるフローも領域 S の境界 ∂S を横切らないとする仮定は、流体力学にも窺え、

$$\phi_n = 0 \quad \text{on } \partial S \quad (23)$$

なる形で示される。 $\phi_n, \partial S$ について前項の議論を想起すれば、(23)式の条件は、いずれの地域においても境界を横切る生産物、労働サービスの流出入は存在しないことを意味し、上の集計量としての純流出量をゼロとする条件よりも強いそれとなる。

さて、フロー線の決定のために各フローが輸送費用を最小化する経路を取るものと仮定しよう。このとき、解は、ネット・ワークに沿った費用最小化経路を探索することでは得られない。むしろ点 (x_1, x_2) を通過する費用を与える所与の函数 $f(x_1, x_2)$ の存在を仮定すれば、所与の経路に沿った1立地点から別のそれへのある量の生産物ないし労働の移転が、当該経路に沿った移転費用 f の線積分としての費用をもたらす。もし、同一の輸送体系が生産物、労働に対して使用されれば、同一函数が繰り返し適用されていく中で、測定単位の標準化が容易となる。すなわち、生産物であれ労働であれ、その1単位の輸送費用が同額となるような単位を選ぶことができることになる。

さて、Beckmann [1], [2] および、Puu [14], [15] にしたがって、問題を変分問題 (variational problem) として定式化しよう。

問題は、

$$\iint_S [f(x_1, x_2) |q| + \lambda(x_1, x_2) (\operatorname{div} q - q + q')] dx_1 dx_2 \quad (24)$$

および、

$$\iint_S [f(x_1, x_2) |l| + \mu(x_1, x_2) (\operatorname{div} l + l - l')] dx_1 dx_2 \quad (25)$$

を、適当に選ばれた Lagrange 関数 $\lambda(x_1, x_2), \mu(x_1, x_2)$, およびベクトル場 q, l に関して最小化するそれとなる。

いま, (25)式を成分表示すれば, 生産物の問題は,

$$-K_q = \max_{q_1, q_2} \iint \left[-f(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda \left(\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + q - q' \right) \right] dx_1 dx_2 \quad (26)$$

と表現し直される。ここで, q_1, q_2 を制御変数として変分法を適用すれば,²⁾ q_1 について

$$-f \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2q_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 0 \quad (27)$$

$$\text{or } -f \frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad (28)$$

がしたがう。同様に, q_2 について

$$-f \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad (29)$$

がしたがう。ベクトル表示に戻せば, (28), (29)式は

$$f \frac{q}{|q|} = \operatorname{grad} \lambda \quad (30)$$

で表現される。ただし, grad は勾配 (gradient) を示す。

同様の手続きを適用すれば, 労働について

$$f \frac{l}{|l|} = \operatorname{grad} \mu \quad (31)$$

がしたがう。(30), (31)式の関係は, 勾配法則 (gradient law) と呼ばれる。

(30), (31)式は, 上の変分問題に対する Euler 方程式 (Euler equation) に外ならない。Lagrange 関数 λ, μ は, 価格ポテンシャル (price potentials) を与える。(30)式は, 生産物のフローが最も急な価格上昇の方向を向いており, さらに, フロー方向での移動費用の増加につれて価格が上昇することを示唆している。このことは, フロー線が等ポテンシャル線 (equipotential lines) を直交する形で切ることを意味している。

さらに, (30), (31)式のそれぞれの両辺のノルムを取れば,

$$|\operatorname{grad} \lambda| = f \quad (32)$$

$$|\operatorname{grad} \mu| = f \quad (33)$$

がしたがう, 2つの勾配が方向のみを異にする同一ノルムを持つことが容易に確かめられる。

ここで, 輸送費用が立地点から独立で,

$$f(x_1, x_2) = f \quad (34)$$

を満たす一様輸送費用 (uniform transportation cost) の場合を想定する。フロー線は直線をなり、例えば、トン=マイルで測ったフロー量に対する総費用の積分値は、

$$\iint f|q| dx_1 dx_2 = f \iint |q| dx_1 dx_2 \quad (35)$$

で表わされる。(35)式を制約条件

$$\operatorname{div} q + q = 0 \quad (36)$$

の下で最小化を図れば、上と同様の手続きから Euler 方程式

$$f \frac{q}{|q|} = \operatorname{grad} \lambda \quad (37)$$

がしたがうことは言うまでもない。

さて、上の Euler 方程式にフロー線に沿った積分を施し、輸送費用の別の表現形を導いておこう。いま、弧長要素 (arc length element) を ds とすれば、(37)式に $q/|q|$ と ds を乗じ積分すれば

$$\int f ds = \int d\lambda \quad (38)$$

を得る。右辺は、 ds という形の完全微分形式 (exact differential form) を成すから、軌道が領域へ出入りする点において、 λ の値をゼロと設定すれば、 $\lambda = \int f ds$ を輸送費用に等しいと解することができる。もし、 λ を生産費用ないし境界での領域内への購入価格に等しいと設定すれば、それは、輸送費用分だけ購入価格の上昇を招いた結果にともなう局地費用を表わすと解せる。

ここで、 $q \cdot q = |q|^2$ 、したがって

$$f|q| = f \frac{q \cdot q}{|q|} \quad (39)$$

を考慮し、上の Euler 方程式を適用すれば、

$$\iint_S [f|q| + \lambda(\operatorname{div} q - q + q')] dx_1 dx_2 = \iint_S [\operatorname{grad} \lambda \cdot q + \lambda \operatorname{div} q - \lambda(q - q')] dx_1 dx_2 \quad (40)$$

がしたがう、さらに

$$\operatorname{div}(\lambda q) = q \operatorname{grad} \lambda + \lambda \operatorname{div} q \quad (41)$$

なる関係を考慮すれば

$$\iint_S [\operatorname{grad} \lambda \cdot q + \lambda \operatorname{div} q] dx_1 dx_2 = \iint_S \operatorname{div}(\lambda q) dx_1 dx_2 \quad (42)$$

と簡略化される。ここで、Gauss 定理を適用すれば、(42)式は境界に沿った積分

$$\int \lambda(q)_n ds = q - q' \quad (43)$$

に等しい。しかるに、 λ は、境界上での価格(ポテンシャル)であり、 $(q)_n$ は境界に対し直交する外向き法線フロー成分であるから、(43)式は、生産物の価値タームによる超過供給に等しい。

再び、(41)式の関係を考慮し、 $\text{div } q = q - q'$ ((19)式)を想起すれば

$$\iint_S (\text{grad } \lambda) q dx_1 dx_2 - \iint_S \lambda \cdot q dx_1 dx_2 = q - q' \quad (44)$$

がしたがう、さらに、Euler 方程式を考慮すれば

$$\iint_S f|q| dx_1 dx_2 - \iint_S \lambda \cdot q dx_1 dx_2 = q - q' \quad (45)$$

がしたがう。(45)式の左辺第1項は、総輸送費用に等しいことは明らかであるが、第2項を解釈するために、超過供給をゼロ、すなわち、 $q = q'$ と設定し、軌道が領域に入る、ないし領域内の特異点(singularities)から出るところでゼロの値を取る λ は、原点からの輸送費用となり、 q は、目的地点での超過需要となる。このとき、 λ は、生産物を一定の距離を往来させるときの通常の輸送費用と解され、 $\iint_S \lambda \cdot q dx_1 dx_2$ は正しく輸送費用に等しくなり、等式

$$\iint_S f|q| dx_1 dx_2 = \iint_S \lambda \cdot q dx_1 dx_2 \quad (46)$$

は、(35)式が輸送費用の妥当な表現形であることを裏づけるものとなる。もし、 $q \neq q'$ ならば、違いは、2つの費用表現が交易量 $l-l'$ に相当する分だけ乖離することだけとなる。

同様の結論は、労働の場合にも妥当することは言うまでもない。

- 1) 例えば、 x_1 を縦、 x_2 を横とみなし得る。
- 2) 変分法(calculus of variations)について、例えば、Léonard=Long [10] 参照。

第2節 双対性と安定性

1. 双対性

本節では、前節で導かれた均衡の性質をみる。

まず、本項では、輸送費用最小化問題と価値生産物最大化問題との間に双対関係がしたがう可能性をみる。

前節では、輸送費用最小化問題が変分問題として定式化された。以下では、源点-沈点関係を満たすすべてのフロー場とすべての微分可能な価格ポテンシャル λ とに対し、すなわち、実行可能(feasible)なすべてのフロー場に対して、上と同一の効率性条件がしたがうことを確かめる。

領域 R の同次境界条件 $\phi_n = 0$ (on ∂R) をもつ連続的輸送モデルに対して、勾配場 (gradient field) を成す実行可能解の存在性をみる。

さて、連続な $q = q(x_1, x_2)$ に対し、 $\iint q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0$ がしたがうとき、

$$\operatorname{div} q + q = 0 \quad \text{all } (x_1, x_2) \in R \quad (47)$$

$$q_n = 0 \quad \text{all } (x_1, x_2) \in \partial R \quad (48)$$

を満たすようなフロー場の存在を確かめよう。

いま、勾配場 ψ を構成すべく、問題

$$\min_{\psi} \iint \frac{1}{2} |\psi|^2 dx_1 dx_2$$

$$\text{s.t. } \operatorname{div} \psi + q = 0 \quad \text{all } (x_1, x_2) \in R \quad (49)$$

$$q_n = 0 \quad \text{all } (x_1, x_2) \in \partial R \quad (50)$$

を想定しよう。前節の手続きを適用すれば、直ちに、解

$$\psi = \operatorname{grad} \mu \quad (51)$$

がしたがう。ただし、 μ は (49) 式に関わる Lagrange 関数である。(51) 式を (49) 式に代入すれば

$$-q = \operatorname{div} \psi = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mu) \quad \text{in } R \quad (52)$$

$$(\operatorname{grad} \mu)_n = 0 \quad \text{on } \partial R \quad (53)$$

がしたがう。しかるに、成分表示すれば、それぞれ

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_2^2} + q(x_1, x_2) = 0 \quad \text{in } R \quad (54)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial R \quad (55)$$

で表わされる。(54), (55) 式は、Poisson 方程式 (Poisson's equation) と呼ばれる。

2 次関数のケース

$$f(\psi, x_1, x_2) = f |\psi|^2, \quad f = \text{constant.} \quad (56)$$

は、物理学の熱伝導・拡散 (heat transport and diffusion) の分脈において特別な役目を担っており、経済学においても、Hotelling [6], Beckmann [3] 等が人口移住 (migration) の文脈に適用した。

しかるに、Poisson 方程式は、解くことが可能であり⁴⁾、上の議論は、勾配場となる実行可能解の存在性を示唆するものである。

ところで、

$$\operatorname{div} (\lambda q) = q \operatorname{grad} \lambda + \lambda \operatorname{div} q \quad (57)$$

なる関係を考慮すれば、(47) 式を満たすすべての実行可能なフロー場とすべての微分可能な λ に

対し,

$$\begin{aligned}\iint f|q| dx_1 dx_2 &= \iint [f|q| + \lambda(\operatorname{div} q + q)] dx_1 dx_2 \\ &= \iint [f|q| + \operatorname{div}(\lambda q) - q \operatorname{grad} \lambda + q \lambda] dx_1 dx_2\end{aligned}\quad (58)$$

がしたがう。しかるに, Gauss 定理より

$$\iint \operatorname{div}(\lambda q) dx_1 dx_2 = \int \lambda q_n ds = 0 \quad (59)$$

がしたがう。ただし, 等号は境界条件((48)式)からしたがう。

ここで,

$$f|q| = f \frac{q \cdot q}{|q|} \quad (60)$$

なる関係を考慮すれば

$$\iint f|q| dx_1 dx_2 = \iint \left[\left(f \frac{q}{|q|} - \operatorname{grad} \lambda \right) q + q \lambda \right] dx_1 dx_2 \quad (61)$$

を得る。(61)式は, 右辺の()内がゼロ, すなわち,

$$f \frac{q}{|q|} = \operatorname{grad} \lambda \quad (62)$$

がしたがうとき, そして, その限りにおいて, q に関して最大値を取る。

しかるに,

$$\begin{aligned}f \frac{q \cdot q}{|q|} - \operatorname{grad} \lambda \cdot q &= f|q| - \operatorname{grad} \lambda \cdot q \\ &\geq f|q| - |\operatorname{grad} \lambda| |q| \\ &= (f - |\operatorname{grad} \lambda|) |q| \\ &> 0 \quad \text{for } |q| \neq 0\end{aligned}\quad (63)$$

から, $|\operatorname{grad} \lambda| < f$ であるとき常に, (62)式は満たされ, したがって,

$$\frac{f \cdot q}{|q|} = \operatorname{grad} \lambda \quad \text{for } q \neq 0 \quad (64)$$

$$f \geq |\operatorname{grad} \lambda| \quad \text{for } q = 0 \quad (65)$$

のときに限り, $\operatorname{div} q + q = 0$ は, 最小値を取り得ることが確かめられた。

さて, 上の効率性条件の導出に際して, 輸送費用を最小化するという問題設定がなされてきた。以下では, かかる最小化問題と価値生産物(利潤)最大化問題とが双対関係に立っていることを確か

めよう。

すでに、領域 R におけるすべての $(x_1, x_2) \in R$ に対して

$$\operatorname{div} q(x_1, x_2) - q(x_1, x_2) = 0 \quad (66)$$

$$|\operatorname{grad} \lambda| \leq f \quad (67)$$

$$q_n = 0 \quad \text{on } \partial R \quad (68)$$

がしたがうことが確かめられた。さらに、

$$\begin{aligned} \iint_R f |q| dx_1 dx_2 &= \iint_R [f |q| + \lambda (\operatorname{div} q - q)] dx_1 dx_2 \\ &= \iint_R [f |q| - \lambda q + \operatorname{div}(\lambda q) - q \operatorname{grad} \lambda] dx_1 dx_2 \\ &= \iint_R \left[q \left(f \frac{q}{|q|} - \operatorname{grad} \lambda \right) - \lambda q \right] dx_1 dx_2 + \int_{\partial R} (\lambda q)_n ds \\ &\geq \iint_R \lambda q dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (69)$$

が得られる。ただし、上の不等号は、 ∂R 上において $\lambda q_n = 0$ であり、(68)式を満たすすべての λ に対して

$$q \left(f \frac{q}{|q|} - \operatorname{grad} \lambda \right) \geq 0 \quad (70)$$

が満たされることからしたがう。したがって、

$$\min_q \iint_R f |q| dx_1 dx_2 \geq \max_\lambda \iint_R \lambda q dx_1 dx_2 \quad (71)$$

がしたがう。ただし、等号は、 $\operatorname{div} q = -q, q_n = 0$ の下で

$$\begin{aligned} K &= \min_q \iint_R f |q| dx_1 dx_2 + \iint_R f |q| + \lambda (\operatorname{div} q + q) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_R [q \operatorname{grad} \lambda + \lambda (\operatorname{div} q + q)] dx_1 dx_2 \\ &= \iint_R [\operatorname{div}(\lambda q) + \lambda q] dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\partial R} (\lambda q)_n ds + \iint_R \lambda q dx_1 dx_2 \\ &= \iint_R \lambda q dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (72)$$

なる関係がしたがうことに由来する。

以上から、原問題 (primal problem)

$$\min_q \iint_R f |q| dx_1 dx_2 \quad (73)$$

$$s.t. \quad \operatorname{div} q + q = 0 \quad (74)$$

は解をもち、したがって、(64)-(68)式の制約の下で

$$\min_q \iint_R f |q| dx_1 dx_2 = \max_\lambda \iint_R \lambda q dx_1 dx_2 \quad (75)$$

がしたがう。

次に、価値生産物最大化の双対問題の効率性条件が原問題の制約となることを確かめよう。

いま、問題

$$\max_\lambda \iint_R \lambda q dx_1 dx_2 \quad (76)$$

$$s.t. \quad \operatorname{grad} \lambda \leq f \quad (77)$$

を想定する。

まず、上の制約条件の両辺を2乗し、 $(\operatorname{grad} \lambda)^2 \leq f^2$ と書き換えれば、Lagrange 函数

$$\max_\lambda \iint_R \left[\lambda q + \frac{\mu}{2} (f^2 - (\operatorname{grad} \lambda)^2) \right] dx_1 dx_2 \quad (78)$$

がしたがう、Euler 方程式

$$q + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \lambda) = 0 \quad (79)$$

がしたがう。ここで、

$$\mu \operatorname{grad} \lambda = q \quad (80)$$

と置けば、原問題の制約条件となる。しかるに、連続的輸送モデルにおいて、境界条件 $q_n = 0$ は、領域 R を他の外界から経済的に孤立させる機能をもつ。自由境界条件 (free boundary condition) は、領域内と外界の間の集計的フローがバランスしなければならないことを主張する。(78)式の自由制約条件は

$$-\left(\frac{\mu}{2} \operatorname{grad} q\right)_n = 0 \quad (81)$$

となる。(80)式を考慮すると

$$q_n = 0 \quad (82)$$

となる。(82)式は、原問題の制約条件を構成する。

2. 動的調整

本項では、境界条件を満たす解の安定化への動的調整の過程をみる。⁵⁾

いま、 λ, q を境界条件 $q_n=0$ を満たす解としてみよう。ここでは、均衡条件、すなわち発散法則と勾配法則に対し、適当な時間単位を選ぶことによって、その安定化への調整過程をみる。次の調整ルールを導入する。

$$\dot{q} = \text{grad } \lambda - f \frac{q}{|q|} \quad (83)$$

$$\dot{\lambda} = -(q + \text{div } q) \quad (84)$$

を想定する。

最初のルールは、輸送費用最小化ないし価値生産物最大化(利潤最大化)をもたらす発送の方向を表わし、2番目のルールでは、地区の純需要総量と地区外への純販売の和が存在し、もし正ならば立地点からの超過供給が存在し、したがって価格が低下することになる。

ここで、費用積分値を Lagrange 函数の形で $F = F(q, \lambda)$ とすれば、その時間に関する変化は

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \iint_R [f|q| + \lambda(\text{div } q + q)] dx_1 dx_2 \\ &= \iint_R \left[f \frac{d}{dt} |q| + \dot{\lambda}(\text{div } q + q) + \lambda \text{div } \dot{q} \right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (85)$$

で表わされる。しかるに、 $|q| = q \cdot q / |q|$ から

$$\frac{d|q|}{dt} = \frac{q \cdot \dot{q}}{|q|} \quad (86)$$

がしたがう、さらに、Gauss 定理を適用し、 $\dot{q}_n = 0$ (on ∂R) を想起すれば

$$\iint_R [\lambda \text{div } \dot{q} + \dot{q} \text{grad } \lambda] dx_1 dx_2 = \iint_R \text{div } \lambda \dot{q} dx_1 dx_2 = \int_{\partial R} \lambda \dot{q}_n ds = 0 \quad (87)$$

がしたがう。したがって

$$\iint_R \lambda \text{div } \dot{q} dx_1 dx_2 = - \iint_R \dot{q} \text{grad } \lambda dx_1 dx_2 \quad (88)$$

がしたがうから、(86), (88) 式を (85) 式に代入すれば

$$\frac{dF}{dt} = \iint_R \left[\dot{q} \left(\frac{f \cdot q}{|q|} - \text{grad } \lambda \right) + \lambda(\text{div } q + q) \right] dx_1 dx_2 \quad (89)$$

がしたがう。ここで、(83), (84) 式を (89) 式に適用すれば

$$\frac{dF}{dt} = - \iint_R \left[\left| \text{grad } \lambda - f \frac{q}{|q|} \right|^2 + (\text{div } q + q)^2 \right] dx_1 dx_2 (< 0) \quad (90)$$

を得る。

均衡条件の中、いずれか1つが犯されない限り、(90)式は厳密な負の符号をとる。したがって、輸送費用の積分値の最小額 F_{\min} に対して

$$F(q, \lambda) - F_{\min} \quad (91)$$

は、Lyapunov 関数の役目を果たし⁶⁾、非負であり、均衡においてのみゼロとなり、時間と共に単調減少する。

次に、生産物に対する需要が価格に依存する場合を想定しよう。

いま、需要関数

$$q = q(p, x_1, x_2) \quad (92)$$

を逆関数

$$p = p(q, x_1, x_2) \quad (93)$$

で表わせば、消費者余剰は、

$$u(q_0, x_1, x_2) = \int_0^q p(q_0, x_1, x_2) dq_0 = u(q) \quad (94)$$

で表わされる。

消費者余剰と生産者余剰(利潤)の和で社会的余剰 (social surplus) を定義すれば、消費者と生産者の間の移転部分を相殺すると、社会的余剰は、需要関数から輸送費用を差し引いた差の積分値で表わされる。すなわち、社会的余剰最大化に際しての被最大化関数は

$$M = \iint_R u(-\operatorname{div} q - f|q|) dx_1 dx_2 \quad (95)$$

で表わされる。ここで、地区市場が常に均衡に在るように

$$p = p(-\operatorname{div} q, x_1, x_2) \quad (96)$$

と設定しよう。このとき、超過供給 $-q(x_1, x_2)$ は地区外への純販売 $\operatorname{div} q$ に等しい。

生産物のフローの調整は、地区外への流出ゼロ、すなわち

$$q_n = 0 \quad \text{on } \partial R \quad (97)$$

を保ちながら、上と同一ルール

$$\dot{q} = \operatorname{grad} p - f \frac{q}{|q|} \quad (98)$$

にしたがう。

さて、 M の時間に関する変化は、

$$\frac{dM}{dt} = \iint_R \left[\frac{\partial u}{\partial q} \dot{q} - f \frac{q \cdot \dot{q}}{|q|} \right] dx_1 dx_2 \quad (99)$$

で表わされ、さらに、 $\partial u / \partial q = p, q = -\text{div } \dot{q}$ を考慮すれば、

$$\iint_R -p \text{div } \dot{q} dx_1 dx_2 = \iint_R (-\text{div}(p \cdot \dot{q}) + \dot{q} \text{grad } p) dx_1 dx_2 \quad (100)$$

がしたがう。ここで、Gauss 定理を適用すれば、

$$\iint_R \text{div}(p \cdot \dot{q}) dx_1 dx_2 = \int_{\partial R} p \dot{q}_n ds = 0 \quad (101)$$

がしたがうから、

$$\iint_R -p \text{div } \dot{q} dx_1 dx_2 = \iint_R \dot{q} \text{grad } p dx_1 dx_2 \quad (102)$$

を得る。いま、(98)式を(99)式に代入し、(102)式を適用すれば、

$$\frac{dM}{dt} = \iint_R q \left(\text{grad } p - f \frac{q}{|q|} \right) dx_1 dx_2 \quad (103)$$

がしたがう、(98)式を適用すれば

$$\frac{dM}{dt} = \iint_R \left| \text{grad } p - f \frac{q}{|q|} \right|^2 dx_1 dx_2 (>0) \quad (104)$$

を得る。

(104)式は、価格が地区超過供給と地区外純販売を均衡化させるように設定される時、フロー調整だけで収束するに十分であることを示唆している。このとき、Lyapunov 関数は、

$$M_{\max} - M(q) \quad (105)$$

で表わされる。

- 3) 本項での手続きの多くを Beckmann = Puu [4] に負う。また、議論を生産物 ($i=q$) に特定化するものとする。さらに、 q が一定であるから、 $q - q'$ を単に q で表記するものとする。
- 4) Poisson 方程式について、Kreyszig [9] (Sec. 21) 参照。
- 5) Zhang [17] (Chap. 8) をも参照。
- 6) Lyapunov 関数 (Lyapunov function) について、Hirsch = Smale [5] (Chap. 9), Lorenz [11] (Chap. 2) 参照。

第3節 規模に関する収穫性

1. 規模に関する収穫一定性

本節では、生産過程における規模に関する収穫性をみる。⁷⁾

本項では、規模に関する収穫一定の場合をみる。

生産が規模に関して収穫一定ないし収穫通減する状況の下では、地区価格のタームで超過供給関数を各立地点と関連づけることが可能となり、競争市場均衡が定義されてくる。

いま、 p_i を立地点*i*における生産物価格、 $q_i(p_i)$ を超過需要、 x_{ij} を立地点*i*から*j*への商品の発送、 h_{ij} を単位発送当たりの輸送費用とすれば、均衡条件は、以下でみるごとく、輸送費用を明示化したところでの適当な消費者余剰と生産者余剰の積分値の最大化を通じて得られる。⁸⁾ 均衡条件は、

$$q_i(p_i) + \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = 0 \quad (106)$$

$$x_{ij} = 0 \iff p_j - p_i < f_{ij} \quad (107)$$

$$x_{ij} \geq 0 \iff p_j - p_i = f_{ij} \quad (108)$$

で与えられる。

もし、逆に、収穫通増性が存在すると、供給者および市場の様相は変わってくる。収穫通増性が際限なく続いていくものとする、各立地点には、唯一の供給者のみが残ることになる。もし、Edgeworth = Bertrand 戦略、すなわち、少数の供給者の価格相互切下げによって利潤最大化を図るその下で、各市場には最安価費用供給者 (lowest-cost supplier) のみが生残り、その費用は規模によって決定される。そこでの均衡は一意とはならず、初期条件と参入企業の各々が図る価格設定と参入・退出行為の動学にも依存することになる。

かかる経済活動の立地性に対して、2つの基本的接近方法が存在する。von Thünen と Weber が主張したそれらである。Weber タイプのそれは、空間的条件を捨象する代りに距離を重視し、その一方で、立地点に応じて変化し得る費用要因を考慮し、離散的な地点における離散的行動を想定する。

これに対して、von Thünen の接近法は、ある特定の区域でいかなる経済活動が展開されるべきかを問うものであり、市場までの距離と同時に土地条件を重視し、他の費用要因の立地点への依存性にも注意を注ぐ。空間的均衡の全体分析においては、両者の接近法とも適用可能性をもつが、部分分析においては、収穫通増性が存在するため、その他の点では同質な経済環境であっても集中化が促がされる生産活動の分析に Weber モデルが適しており、von Thünen モデルは、収穫一定性ないし通減性をもつ生産活動が検討される際に、より妥当性を発揮すると考えられる。

しかるに、以下では、von Thünen 的設定の中で、規模に関する収穫性を議論するものとする。

さて、議論の簡単化のために、市場参加者が、完全競争の中に在るかのごとく価格受容者 (price taker) として行動する市場で1種類の生産物が取引される場合を想定する。地区の需要密度は、立地点に依存する地区価格 $p(x_1, x_2)$ の函数

$$q = q(p, x_1, x_2) \quad (109)$$

で与えられるものとする。このことは、消費者も価格受容者として行動することを意味する。

まず、対比のために、生産は、規模に関する収穫一定性をもつものとする。生産函数は、所与の賃金率 $w(x_1, x_2)$ 、地代 $g(x_1, x_2)$ の下でそれぞれ利用可能な2つの要素、労働 L と土地 M のみをもつ Cobb-Douglas 函数

$$Z = b(x_1, x_2)L^\alpha M^\beta, \quad \alpha + \beta = 1 \quad (110)$$

で表わされるものとする。ただし、 $b(x_1, x_2)$ は、立地点に依存する生産性係数である。また、産出弾力性 α, β は技術的に決定され、立地点には依存しないものとする。いま、地区 A (面積) 当たりの密度のタームで表現すれば、(110)式は、

$$z = b(x_1, x_2)l^\alpha m^\beta \quad (111)$$

と表現し直される。ただし、 $z = Z/A, l = L/A, m = M/A$ である。

ここで、需要関数 $q(p, x_1, x_2)$ を裏付ける効用関数は、消費者余剰の積分値で表わされるものとする。すなわち、

$$u(q, x_1, x_2) = \int_0^q p(\eta, x_1, x_2) d\eta \quad (112)$$

で表わされる。ただし、 $p(\eta, x_1, x_2)$ は、上の(109)式の逆函数であり、それは、需要函数が厳密に減少函数であれば存在する。

次に、生産物の地区フロー ϕ にともなう輸送費用は

$$F = f(x_1, x_2) |\phi| \quad (113)$$

で与えられ、⁹⁾したがって、地区の総輸送費用は

$$\iint f(x_1, x_2) |\phi| dx_1 dx_2 \quad (114)$$

となる。このとき、フロー ϕ と超過需要 $z - q$ の間に発散関係が存在し、

$$\operatorname{div} \phi = z - q = b(x_1, x_2)l^\alpha m^\beta - q \quad (115)$$

がしたがう。

しかるに、競争均衡は、生産費用と輸送費用の控除後の消費者余剰が最大化されるところで達成されるから、問題は、(115)式を制約条件とし、

$$\max \iint [u(q, x_1, x_2) - wl - gm - f(x_1, x_2) |\phi|] dx_1 dx_2 \quad (116)$$

$$\text{s.t. } m \leq 1 \quad (117)$$

で表わされる。ただし、(117)式は、土地利用の制約条件であり、 $w = w(x_1, x_2), g = g(x_1, x_2)$ はそれぞれ労働、土地の価格であり、所与とされる。

以上から, Lagrange 函数

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \iint [u(q, x_1, x_2) - wl - gm - f(x_1, x_2) |\phi| \\ & + \lambda [b(x_1, x_2) l^\alpha m^\beta - q(p, x_1, x_2) - \text{div} \phi] + \mu(1 - m)] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (118)$$

がしたがう。最適な q, l, m そして ϕ が満たすべき 1 階条件は, それぞれ

$$\left. \begin{aligned} u' - \lambda &\leq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } q > 0 \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

$$\left. \begin{aligned} -w + \lambda \alpha \frac{z}{l} &\leq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } l > 0 \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

$$\left. \begin{aligned} -g - \mu + \lambda \beta \frac{z}{m} &\leq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } m > 0 \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

$$\left. \begin{aligned} -f \frac{\phi}{|\phi|} + \text{grad} \lambda &= 0 \quad \text{if } \phi \neq 0 \\ -f + |\text{grad} \lambda| &\leq 0 \quad \text{if } \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ \mu &= 0 \quad \text{when } l < 1 \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

がしたがう。しかるに, Lagrange 函数は凹函数であるから, 上の諸条件は, 最大化のための必要・十分条件を成す。生産と消費が空間的に分散した競争市場が想定されていることを想起すれば, 均衡は, そのフロー場が ϕ である地域間取引を通してもたらされる。

さて, (x_1, x_2) に立地する企業の地区当たりの生産物価格は $\lambda(x_1, x_2)$, 利潤率ないし土地収益率は $\mu(x_1, x_2)$ であり, (119) 式は, 消費が(金額タームの)限界効用と生産物価格が均等化するところで決定されることを表わしている。同様に, ゼロ水準の消費の下ですら, 価格が限界効用を上回り続けるところでは消費が発生しないことを意味している。(120), (121) 式は, 限界生産力と要素価格の関係について, 上と同様の議論が妥当することを示唆している。(122) 式は, 生産物の出荷が価格が最も急な増加の方向において行われ, その方向においてのみ利益がもたらされることを表わしている。最後に, (123) 式は, 土地が完全利用されないところでは, 追加的土地収益率はゼロとなることを意味している。

2. 規模に関する収穫逓増性

本項では, 規模に関する収穫逓増性が妥当するところでの生産の可能性をみる。

再び, Cobb = Douglas 型生産函数を想定し, 単位地区 A 当たりの密度のタームで表現すれば

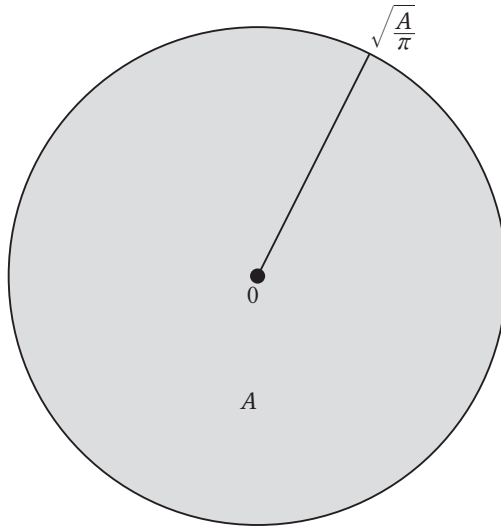


図-2

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{Z}{A} = b(x_1, x_2) A^{\alpha+\beta-1} \left(\frac{L}{A}\right)^\alpha \left(\frac{M}{A}\right)^\beta \\
 &= b(x_1, x_2) A^{\alpha+\beta-1} l^\alpha m^\beta
 \end{aligned}
 \tag{124}$$

がしたがう。産出量密度は、投入要素の増加函数であるとともに、生産が展開される地区 A の規模(面積)の増加函数となることが含意される。このことは、 A の面積が規模の尺度となり、もう1つの生産要素の役目を演ずることを示唆している。Cobb-Douglas 生産函数の下では、産出量弾力性は、規模に関する収穫性の度合 $\alpha+\beta-1$ に等しい。

しかるに、ある地区内での生産活動の拡大化は、他方で地区内部の通信・輸送費用の拡大化という負の効果をも持ち合わせる。ここで、地区は、円形(circular)を成すものとする。(図-2参照。)そこでの移動は、単位距離当たり h の輸送費用を招くものとする。このとき、すべての労働は、円の中心から作業場所まで往って帰る移動を少なくとも1回は行わなければならないものとする。このとき、移動の総費用は、

$$\begin{aligned}
 hl \int_0^{\sqrt{\frac{A}{\pi}}} 2\pi r^2 dr &= hl \frac{2}{3} \pi \left(\left(\frac{A}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^3 \\
 &= \frac{2}{3} hl \pi^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{125}$$

で表わされる。積分域は、地区の規模 A の下で外縁に辿り着くためには、半径 $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ の距離を移動しなければならないことを意味する。したがって、単位地区当たりの費用、すなわち、費用密度は、

$$\frac{2}{3} hl \pi^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}
 \tag{126}$$

となる。さらに、土地利用の密度は1以下に制限されなければならない

$$m \leq 1 \quad (127)$$

がしたがう。

ところで、労働密度は、労働者収容施設の建設費用で近似される。例えば、労働密度の増加は、その収容のために施設の高層化が要請され、したがって費用の増加が伴う。ここで、施設の建設・維持の費用を cAl^γ で表わそう。ただし、 c は、単位費用地区当たりの費用密度は

$$cl^\gamma, \quad \gamma > 1 \quad (128)$$

で表わされる。このとき、問題は、

$$\begin{aligned} \max_{q, l, m, \phi, A} \iint \left\{ u(q, x_1, x_2) - wl - gm - f(x_1, x_2) |\phi| - \frac{2}{3} h\pi^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} - cl^\gamma \right. \\ \left. + \lambda [b(x_1, x_2) A^{\alpha+\beta-1} l^\alpha m^\beta - \text{div} \phi] + \mu(1-m) \right\} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (129)$$

で表現される。

しかるに、収穫逓増の下では、1つの立地点ないし地区における生産物供給者は、もはや完全競争者とはみなし得ない。1企業が地区A全体を取得することもあるであろうし、それぞれの地区の企業は、確認し合えるほどの数となり、産業は寡占ないし独占的競争の様相を呈するかもしれない。後者の2つのうちのどちらが実現化するかは、輸送費用規模に対する規模に関する収穫の大きさに決定的に依存する。

ところで、上の最大化問題((129)式)は、参入規制を伴う独占的競争と整合するが、寡占の下では、限定的場合においてのみ妥当するに過ぎない。しかるに、空間が等質であるとき、上の最大化は参入規制と競争価格をもつ Lösch タイプの空間市場均衡を導く。

さて、最適な q, m, l, A , そして ϕ が満たすべき効率性条件は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} u' - \lambda &\leq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } q > 0 \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda \beta z}{m} - \mu - g &\leq 0 \\ &= 0 \quad \text{if } m > 0 \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu &\geq 0 \\ &= 0 \quad \text{when } m < 1 \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda \alpha z}{l} - w - \frac{2}{3} h\pi^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} &\leq 0 \\ &= 0 \quad \text{when } l > 0 \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(\alpha+\beta-1)z}{A} &\leq \frac{1}{3} h\pi^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \\ &= 0 \quad \text{when } A > 0 \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

$$\left. \begin{aligned} f \frac{\phi}{|\phi|} &= \text{grad } \lambda \quad \text{when } \phi \neq 0 \\ f &\geq |\text{grad } \lambda| \quad \text{when } \phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

で表わされる。ただし、 $l > 0, m > 0, A > 0$ は、 $z > 0$ で置き換えられる。

しかるに、これらの条件は、 A のタームでの整合性を要請している。産出量 z は、規模 A の隣接地区において正の値を取らなければならないが、 $-lA^{-\frac{1}{2}}$ がもはや凹ではなくなるから被積分関数は凹とはならず、したがって、上の効率性条件は、最大化のための必要条件ではあるが、十分条件ではない。さらに、解は、必ずしも一意とはならない。

しかるに、例えば、 $f \equiv 1, p \equiv 1$ 、かつ $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ のように、立地点の選択、市場地区の規模が立地条件の差に影響されない等質な空間において、Lösch [12] による解 (Löschian solution) がすでに導かれている。そこでの解は、同形の規則的市場地区の中心に規則的形状をもつ孤立的生産地区から成っている。この形状が六角形となるか円となるか、あるいは、角が円形に丸められた六角形となるかは、間接費の輸送費用に対する比の値に依存することが、Mills = Lav [13] によって確かめられている。

さて、以下では、立地点の選択、市場地区の規模が立地条件の差に影響される非等質空間を想定する。このとき、同一の効率性条件が成立し続けるが、パラメータもすべて立地点 (x_1, x_2) の函数とみなされなければならない。生産地区の規模、立地点は、地区条件に依存し、規則性は成立し得ない。

Beckmann = Puu [4] は、計算の面倒を避けるため、結論に影響を与えない単位胞体 (unit cell) の離散的なネットワークを想定する。¹⁰⁾ そこで、収穫逓増性ではなく収穫逓減性が支配したら、すなわち、

$$\alpha + \beta < 1 \quad (136)$$

がしたがうとしたら何が起るだろうかを問う。

再び、立地条件に依存しない非空間的生産函数

$$Z = bL^\alpha M^\beta, \quad \alpha + \beta < 1 \quad (137)$$

を想定する。通常、収穫逓減性が妥当するのは、一定水準に維持される生産要素 K が存在し、その結果 K を含めて収穫一定性が生ずる、すなわち、

$$Z = bL^\alpha M^\beta K^\gamma, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (138)$$

がしたがう場合である。ここで、全域にわたって K は固定されているとすれば、地区密度のタームで生産函数は

$$\frac{Z}{A} = b \left(\frac{L}{A} \right)^\alpha \left(\frac{M}{A} \right)^\beta \left(\frac{K}{A} \right)^\gamma \quad (139)$$

$$\text{or } z = b K^\gamma A^{-\gamma} l^\alpha m^\beta \quad (140)$$

で表わされる。

しかるに、上の生産函数の下で、 $K^\gamma A^{-\gamma} = (K/A)^\gamma$ から、利用面積が最小化される時地区当たり

の産出量が最大化されるという不都合な結論がしたがう。このことは、(139)式ないし(140)式の定式化自体が不都合なそれであることを示唆する。

ここで、 $\alpha + \beta < 1$ と仮定する以外、収穫一定性をもつ生産函数と同一のそれ

$$z = bl^\alpha m^\beta, \quad \alpha + \beta < 1 \quad (141)$$

を想定する。このとき、利潤

$$\pi = \lambda \cdot bl^\alpha m^\beta - wl - gm \quad (142)$$

の最大化が図られるとき、最適な l, m が満たすべき効率性条件は、

$$\frac{\alpha \lambda z}{l} = w \quad (143)$$

$$\frac{\beta \lambda z}{m} = g \quad (144)$$

で表わされる。(143), (144)式から

$$\frac{l}{m} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{g}{w} \quad (145)$$

がしたがう、間接利潤函数

$$\pi^* = \max_m \lambda b \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{g}{w} \right) m^{\alpha+\beta} - g \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) m \quad (146)$$

を得る。(146)式の最大化を実行すれば、

$$m = [\lambda g^{\alpha-1} w^{-\alpha} b \alpha^\alpha \beta^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \quad (147)$$

を導く。(147)式は、 g が大きくなればなる程 λ が小さくなる、すなわち、地区の土地未利用部分が他の経済活動に転用されないものとする、収穫逓減性は、地区土地の過少利用を促す可能性があり、その度合は収穫一定の下におけるより大きくなる。

逆に、収穫逓増性は、土地利用の拡大化を促す反面、前述のごとく、地区内輸送・通信費用の増大化を招き、また、労働密度も、かかる労働密度の収容に要する施設増築費用の増大化を招くことによって、土地利用の拡大化は歯止めが掛けられる。

以上から、空間は、生産における収穫逓増性に対する抑止力として作用し、したがって、自ずと所定の経済的均衡が実現される、と Beckmann = Puu, *op.cit.*, は結論する。

7) 本節の議論の多くは Beckmann = Puu, *op.cit.*, (Chap. 6) に負う。

8) 例えば, Samuelson [16] 参照。

9) 記号重複を避けるため、地区フローを ϕ で表わすものとする。

10) 単位胞体は、2次元の場合、単位円 (unit circle) と同値となる。

結びにかえて

1960年代半ば過ぎのソ連において、輸送問題は、経済計画の主要計画指標であり続けていた。経済の地方分権化が叫ばれても、政治的癒着に縛られた経済は、それを妨げることはあっても促すことはなかった。Khachaturov(Хачатуров)なる経済学者が輸送問題の大家として名を馳せていた。彼の著作に直接触れる機会を得ていないが、Kantorovich(Канторович)流の線型計画法を弄するそれであることは容易に推測されるところである。

上では、経済活動が Beckmann 流の 2 次元連続ベクトル空間におけるフローで表わされ、それは、立地座標の関数である方向と規模(広さ)をもつ連続ベクトル場を構成した。

明示的に生産過程を含む生産経済において、輸送費用最小化を図る変分問題に対する経済の効率性条件、発散法則と勾配法則が導かれた。輸送費用最小化問題は、価値生産物(利潤)最大化問題と双対関係に立つことが確かめられ、次いで、市場の(漸近)安定性が確かめられた。

ところで、収穫逓増性に関する最初の議論は、A. Marshall によってなされた。しかるに、彼の主張は、産業が一企業に独占されてしまう Marshall 問題に直面することになった。Marshall 本人は、収穫逓増性からの規模の経済は、産業間では働くが企業内で働かないとする苦渋の説明をする逃げの手を打つに留まった。

上の Marshall 問題に対して、企業の生産規模の拡大を抑えているのは個別企業に向けられる需要量に制約があるからであるとする(Keynes 肝煎りの)別解が Sraffa によって提示された。

しかるに、上の Beckmann = Puu の議論は、これらの論争の不毛性は地域性ないし立地条件からの影響が考慮されていない点に由来すると断じているかのごとくに映る。生産要素投入量それ自体ではなく、地区(面積)当たりの投入密度のタームでの一定性を特定の要素に対し措定し、残る要素の投入密度に関して収穫逓減性を仮定すれば、土地利用度は、むしろ低下に向かい Marshall 問題が生ずる余地はなくなる。

もし、残る生産要素投入密度に対して収穫逓増性が認められるところでは、土地利用度は拡大し規模の経済は増加していく Marshall 問題に直面する筈であるが、Beckmann = Puu は、地域性ないし立地条件が、輸送・通信費用の上昇、労働者収容施設増設にともなう(頭割り)間接費の拡大化が抑上力として作用し、規模の経済に限界を画することになると結論する。

上の議論は、伝統的経済学で展開されると同種の生産経済の問題を空間的に拡張された空間経済において展望的に対比を試みるものに過ぎないことを断っておかなければならないであろう。

References

- [1] M. J. Beckmann, "A Continuous Model of Transportation," *Econometrica*, 20, 1952.
- [2] _____, "The Partial Equilibrium of a Continuous Space Market," *Weltwirtschaftliches Archiv*, 71, 1953.
- [3] _____, "On the Equilibrium Distribution of Population in Space," *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 19, 1957.
- [4] _____, and T. Puu, *Spatial Economics: Density, Potential and Flow*, North Holland, 1985.
- [5] M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamic Systems, and Linear Algebra*, Academic Press,

- 1974.
- [6] H. Hotelling, "A Mathematical Theory of Migration," M. A. thesis (1927) printed in *Environment and Planning A*, 10, 1978.
 - [7] L. Kantorovich (Д. Канторович), "On the Translocation of Masses," *Management Science*, 5, 1942 (originally in *Доклады Академии Наук СССР*, 37.)
 - [8] T. C. Koopmans, "Optimal Utilization of the Transportation Systems," *Econometrica*, 17, 1949.
 - [9] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley and Sons, 2006.
 - [10] D. Léonard and N. V. Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, 1992.
 - [11] H-W. Lorenz, *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag, 1989.
 - [12] A. Lösch, *The Economics of Location*; translation from the German *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Yale University Press, 1954 (German Edition 1940.)
 - [13] E. S. Mills and M. R. Lav, "A Model of Market Areas with Free Entry," *Journal of Political, Economy*, 72, 1964.
 - [14] T. Puu, "Regional Modelling and Structural Stability," *Environment and Planning A*, 11, 1979.
 - [15] _____, "Structural Stability and Change in a Geographical Space," *Environment and Planning A*, 13, 1981.
 - [16] P. A. Samuelson, "Spatial Price Equilibrium in Linear Programming," *American Economic Review*, 42, 1952.
 - [17] W. B. Zhang, *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*, Springer-Verlag, 1991.