3.2.2 一般の3角形

一般の3角形は，それを長方形（辺は横と縦）に内接させたとき，その辺上に3点があるものと，2点しかないものに分かれます。分けて考えることにします。

1) 下図のように，3角形PQRの3頂点が長方形PSTUの周上にある場合

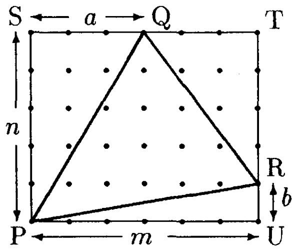


図17 一般の3角形 (1)

辺PU, PS, SQ, URの長さをそれぞれ，m, n, a, bとすれば，3角形PQRの面積Sは，長方形PSTUの面積から3つの直角3角形SQP, TRQ, UPRの面積の和を差し引くことによって

$$S=\frac{1}{2}(mn-ab) \tag{7}$$

と求まります。

3角形PQRの内部と周上の点の個数をそれぞれp, qとし，さらに，3角形SQP, TRQ, UPRの内部と周上の点の個数をそれぞれ$p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3$，辺PQ, QR, RP上の頂点以外の点の個数を$t_1, t_2, t_3$とすると，前と同様な理由により，

$$\begin{aligned}
&q=t_1+t_2+t_3+3,\\
&p+p_1+p_2+p_3+t_1+t_2+t_3=(m-1)(n-1),\\
&2p_1+t_1=(n-1)(a-1),\\
&2p_2+t_2=(m-a-1)(n-b-1),\\
&2p_3+t_3=(m-1)(b-1)
\end{aligned}$$

が成り立ちます。この5つの等式を用いて計算すると，

$$p+\frac{q}{2}-1=\frac{mn-ab}{2} \tag{8}$$

を導くことができます。式(8)の右辺は(7)により3角形PQRの面積Sです。

2) 下図のように，3角形PQRの頂点Rが長方形PSQTの内部にある場合

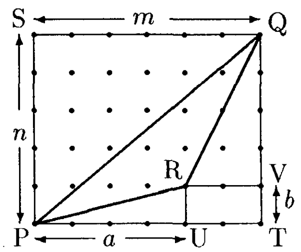


図18 一般の3角形 (2)

辺SQ, PS, PU, URの長さをそれぞれ，m, n, a, bとすれば，3角形PQRの面積Sは，長方形PSQTの面積から3つの直角3角形PSQ, QVR, RUPと長方形RVTUの面積の和を差し引くことによって

$$S=\frac{1}{2}(an-bm) \tag{9}$$

と求まります。この場合も1)と同様にして

$$p+\frac{q}{2}-1=\frac{an-bm}{2} \tag{10}$$

を導くことができます。

以上1)，2)により，一般の3角形に対して法則(1)の確認ができました。すなわち，

性質Q すべての3角形に対して法則(1)が成立する。

あらゆる多角形は3角形に分割できますから，性質Qと性質Pにより，あらゆる多角形について法則(1)の成立が確認されました。（第1の証明終り）

一般に，m角形は$m-2$個の3角形に分割されます。この性質Qと式(6)により，応用問題Aは解決です。

3.3 最も単純な多角形 — その2

多角形の単純さを，内部や周上の点が少ないことと考え，分割を徹底的に進めると,「内部にも頂点以外周上にも格子点のない3角形」に到達します。このような3角形を**最小3角形**と呼ぶことにします。最小3角形においては

$$p=0,\quad q=3$$

ですから，法則(1)はすべての最小3角形の面積が1/2であることを意味しています。最小3角形を次の2種類に分けて，その面積が1/2であることを示しましょう。

第1種：1辺が横方向，または縦方向のもの。

第2種：3辺とも方向は横でも縦でもないもの。

1) 第1種の最小3角形の場合

下図のように，PQを第1種の最小3角形の底辺とし，頂点RはPQの上側にあるとします。

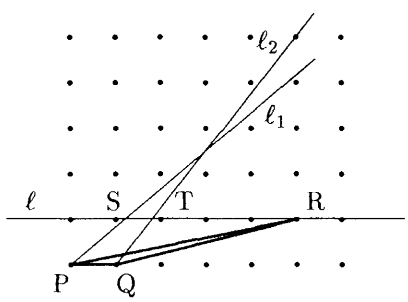


図19 第1種の最小3角形

定義より底辺の長さは1です。その高さが1であることを示すために，高さが2以上であると仮定して矛盾を引き出します（この論法がおなじみの**背理法**です）。

仮定により，底辺の端点 P, Q ともう1つの頂点を結ぶ2つの線分 ℓ_1, ℓ_2 は，底辺との間隔が1の平行線 ℓ 上にある隣接2点（例えば，S, T）の間を通過しなければなりません。ℓ_1 と ℓ_2 は互いに交わるまで，直線 PS，直線 RT の間にあります。ところが，2直線 PS，RT の間には格子点は存在しないので，ℓ_1, ℓ_2 の交点は格子点ではないことになり，仮定と矛盾します。

したがって，第1種の最小3角形の高さは1，すなわち，頂点 R の位置は直線 ℓ 上に限られ，その面積は 1/2 となります。

2) 第2種の最小3角形の場合

下図のように，第2種の最小3角形 PQR において辺 QR を最長とし，点 P は QR の左側に位置するとしても一般性を失いません。

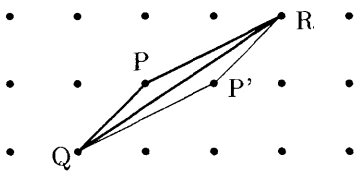


図20 第2種の最小3角形

点 P' を4辺形 PRP'Q が平行4辺形となるようにとります。3角形 P'QR も第2種の最小3角形となりますから，平行4辺形 PRP'Q の内部，および頂点を除く周上には格子点はありません。

以下，座標表現を使い，2点を $P(x, y)$，$Q(x', y')$ とすると，$x = x'$，または $y = y'$ です。なぜならば，もし $x \neq x'$, $y \neq y'$ とすると，2点 (x, y'), (x', y) はこの平行4辺形の内部の格子点になるからです。

そこで，$y = y'$ とすると，$x' = x + 1$ であり，3角形 PRP'，P'QP は第1種の最小3角形であることが分かります。その面積は 1/2 ですから，平行4辺形 PRP'Q の面積は1，よって，第2種の最小3角形 PQR の面積は 1/2 となります（$x = x'$ のときも同様）。

一般の第2種の最小3角形の形は，n を任意の整数として，3点 $(0, 0)$，$(-n, -1)$，$(n + 1, 1)$ で表されます。

以上1)，2)により，すべての最小3角形の面積は 1/2 であることが示されました。すなわち，

性質 R すべての最小3角形に対して法則 (1) が成立する。

あらゆる多角形は最小3角形に分割できますから，性質 R と性質 P により，あらゆる多角形について法則 (1) の成立が確認されました。（第2の証明終り）

面積 S の多角形は $2S$ 個の最小3角形に分割されます。

3.4 証明を終わって

法則 (1) に関して2通りの証明を得ました。第2の証明は，3角形をさらに細かく分割し，最小3角形の形状を具体的に決定していますが，法則の確認だけが目的ならば簡潔な第1の証明で十分です。

“困難の分割”の性質 P がキーポイントです。あらゆる多角形が，法則を保存する接続操作によって最も単純な3角形から構成できることを示しました。この論法と数学的帰納法との類似に注目してください。

今回はまず，いろいろな多角形をしらべてある**法則**を発見しました（番組の中で）。どんな多角形に対しても成立すると思われますが，論理的にはこれは**予想**に過ぎません。予想を得るまでの思考過程は**帰納**（induction）と呼ばれます。

予想を**定理**にする次の段階が，「なぜならば」で始まり「よって，〜である」で終わる推論プロセス，すなわち**証明**です。前提から結論を導く思考過程は**演繹**（deduction）と呼ばれます。なお，数学的帰納法は，名前は帰納法ですが演繹法の一種です。

帰納と演繹は哲学用語で，日常的には使われませんが，英語の動詞形 induce，deduce は専門用語以外でも普通に使われます。初めての人は，漢和辞典や英和辞典などを訪ねてみるとよいでしょう。

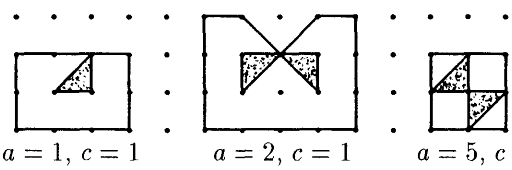
関心がなければ「数学の証明」は退屈の極みです。けれども，面白い法則に気づいたとき，「なぜだろう。不思議だ。その理由は？」と素朴に不思議がるのが“ホモ・サピエンス”の本性です。「自分がとことん確信するにはどうしたらよいか」と静かに考えれば，証明の意義や価値や面白さが理解できます。

4 法則を拡張する

1.2節で“ひねくれた”例外の存在を紹介しました。それらを例外として排除するのではなく，逆に公式の方を修正して拡張することを試みます。

4.1 接点のある場合

多角形の周は交差することはありませんが，図のように1点で接触することはあり得ます。多角形の周が複数回通る格子点を**接点**と呼ぶことにします。



$a = 1, c = 1$　$a = 2, c = 1$　$a = 5, c = 4$

図21 接点のある多角形

接点の扱いは簡単です。多角形の周に沿ってハサミを

入れ，多角形をその台紙から切り離します。そうすると，接点は別々の頂点として通常通りに扱うことができます。周が3回以上同じ接点を通ることも考えられます。周が k 回同じ接点を通るとき，その接点の**重複度**を $k-1$ として，すべての接点の重複度の総和を a で表すことにします。

ハサミを入れたとき多角形がいくつかの**連結成分**に分離されることもあるので，連結成分の個数を c とします。連結成分ごとに公式 (1) が成り立ちますから，接点のある多角形に対する公式は次の通りです。

$$S = p + \frac{q+a}{2} - c. \tag{11}$$

4.2 穴のある場合

多角形に穴が開いている場合，周は複数の閉じた折れ線になります。ここで，**穴**とは接点を切り離しても残るものだけを指すことにして，穴の個数を g で表すことにします。図 21 の多角形では $g=0$ です。

穴のある場合の公式を得るために，下図のように分離している周と周とを連絡する補助線 ℓ を引き，補助線に沿ってハサミを入れた図形を考えます。

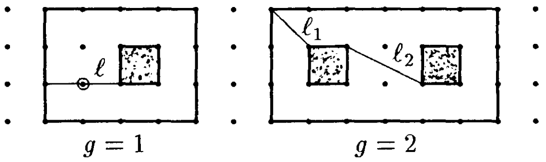


図 22 接点のある多角形

穴が1個 ($g=1$) の場合には補助線は1本で，補助線上にある多角形内部の点の個数を t とすれば，ハサミを入れた後の内部の点は $p-t$ 個，周上の点は $q+2t+2$ 個になります。この図形に通常の公式を適用すれば

$$S = (p-t) + \frac{q+2t+2}{2} - 1 = p + \frac{q}{2} - 1 + 1$$

が得られます。この結果は ℓ, t に依りません。

一般に，穴のある多角形に対する公式は次の通りです。

$$S = p + \frac{q}{2} - 1 + g. \tag{12}$$

4.3 一般と特殊

公式 (11) と (12) を合わせ，接点と穴の両方がある場合を考えることができます。接点の重複度の総和 $a\,(\geq 0)$，連結成分の個数 $c\,(\geq 1)$，穴の個数 $g\,(\geq 0)$ である一般化された多角形の面積 S に関する公式は次の通りです。

$$S = p + \frac{q+a}{2} - c + g. \tag{13}$$

とくに $a=0, c=1, g=0$ の場合には公式 (1) と一致するので，公式 (13) は公式 (1) の**一般化**であり，逆に (1) は (13) の**特殊化**になっています。

格子点の空間を3次元に拡張する一般化も興味深いものです。次の問題の解答が分かったら教えてください。

問題 B 4個の3次元格子点を頂点とする4面体の内部に含まれる格子点の個数を求めよ。

あとがき

本稿のもとになったテレビ番組について，後日インターネットで検索して以下のことが分かりました。

この番組は，日本放送協会（NHK）の学校放送（TV）の中で，「わかる算数6年生」というプログラムで，2005年4月から2006年3月まで20回シリーズの1つでした。本稿で引用したものは第3回「**点と形のひみつ**（面積）」で，筑波大学付属小学校の田中博史先生が担当されました。当分の間，下記のサイトで授業風景のビデオを見ることができます。

http://www.nhk.or.jp/sansu6/sansu6/03/odai/08.html

教師用の「指導のポイント」を読んで，題材の法則が**ピックの定理**と呼ばれていることを知りました。インターネットで検索すると，かなり多数のサイトがあり，G. A. Pick という人が1899年に発表したこと，定理の証明，応用，初等教育への活用例などが掲載されています。ただし，その数のおびただしさにはやや“興ざめ”の感があり，“情報過多”は想像力や好奇心をかえって鈍らせるかも知れない，と思いました。

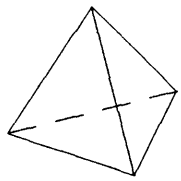
散策中に浮かんだ連想を列挙して本稿を結びます（今回のテーマとの関連性はよく吟味していません）。

1) オイラーの多面体定理

オイラーが1752年に発見したトポロジーの基本定理。

球面と同相な（$g=0$ の）2次元有限多面体の頂点，辺（稜），面の個数をそれぞれ α_0，α_1，α_2 とすれば，

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$



例 4角錐

$\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 6, \alpha_2 = 4.$

2) プラニメーター（Amsler の面積計）

線積分の原理を応用して，閉曲線をなぞるだけでそれが囲む図形の面積を計算するアナログ計算機（筆者所有）。

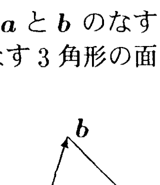
3) ヘロンの公式

3辺の長さを a, b, c とし，$s = (a+b+c)/2$ とすると3角形の面積 S は，$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

4) ベクトルの外積

$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす平行4辺形の面積（符号付）に等しい。なす3角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|.$$



これは本文の式 (7)，(9) で利用した。