

固有値問題で、線形代数の教科書でなじみがある。\$B\$ が正則の（逆行列をもつ）場合は、普通の固有値問題に帰着する。

\$B\$ が正則でない場合の例を示す。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

明らかに、\$\lambda = 1, \mathbf{x} = (1, 0, 0)^T\$ は“通常の”解である。\$\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T\$ は、任意の値を許す“特異な”固有値 \$\lambda\$ に対応する“一般”固有ベクトルである。\$\lambda = 1/\varepsilon, \mathbf{x} = (0, 1, 0)^T\$ も解であるが、数値計算上 \$|\varepsilon|\$ が \$0\$ に近いとき、通常の解と特異な解の区別が困難になる。

例えば筆者らの計算プログラムでは、対角化で現れる対角要素は、絶対値が \$10^{-8}\$ 以下ならば \$0\$ とみなした。本文で論じた一般固有値問題では、予め \$A, B\$ の階数がわかるので特異な解を除外できる（3.2節の末尾）。統計計算で扱う行列 \$A, B\$ は実対称、正定値（または非負定値）であるから固有値は実数になるが、固有ベクトルの直交性は成り立たない。

例えば筆者らの計算プログラムでは、対角化で現れる対角要素は、絶対値が \$10^{-8}\$ 以下ならば \$0\$ とみなした。本文で論じた一般固有値問題では、予め \$A, B\$ の階数がわかるので特異な解を除外できる（3.2節の末尾）。統計計算で扱う行列 \$A, B\$ は実対称、正定値（または非負定値）であるから固有値は実数になるが、固有ベクトルの直交性は成り立たない。

一般固有値問題の解法としては、1973年に発表された Moler と Stewart による QZ 法（正則行列 \$Q, Z\$ により \$A, B\$ をともに上三角行列 \$QAZ, QBZ\$ に変換し、固有値を対応する対角要素の比として求める方法）があるが、筆者らは \$Q, Z\$ の構成法をまだ把握していない。

（この付録では、Virginia 大学コンピュータ科学科が公開している講義資料を引用した。）

あとがき

前回は、前回試みなかった数量化Ⅱ類を使って分析を行った。数量化だけでなく様々な分析の知識が必要であり、Ⅰ類のときよりも理解するまでに時間がかかり苦労した。しかし「カテゴリー変数を数量化する」という考えはわかっても具体的な分析方法を理解するのに大変時間がかかった。また研究を続けるうちに、Mathematica で一からプログラムを組むのではなく、SPSS や R など簡単に統計できるソフトの存在を次々と知り、より手軽にやりやすくなるのではないかと感じた。大学の授業だけでは身に付けることのできなかつた手法をより深く学べて、大変勉強になった。（永添）

今回は、前回試みなかった数量化Ⅱ類を使って分析を行った。数量化だけでなく様々な分析の知識が必要であり、Ⅰ類のときよりも理解するまでに時間がかかり苦労し

た。しかし、この分析方法を知ったことで、より幅広い分析ができるようになったと感じた。今回、学生が手軽に使用できるよう、SPSS で数量化を行う方法を紹介した。できるだけ詳しく記述したので、機会があればぜひ試みて欲しいと思う。（村上）

今回も一から Mathematica でプログラムを作り、それを実行させながら、数量化Ⅱ類の分かりやすい解説を手がけた。前稿と同様に考え方と計算法を述べ、確率モデルにもとづく推定・検定については全く触れてない。世に周知の技法だから参考書を要約すればよからうと予断していたが、細かい点になると意外にもきちんと書かれていない。時間をかけて自分なりに疑問点を解決したが、まだ書きそろうていない部分もある。

多変量解析の世界は「線形数学」の活躍舞台であり、その素晴らしい活躍には改めて感嘆するとともに、この感慨を学生諸君と共有したい気持ちが深まる。本学部では、アンケート調査の分析などデータ解析の必要性が十分に認識されていて、それを支援するハード・ソフトの環境が整っている。しかしながら、実際にそれを使いこなすには先達による丁寧な手ほどきが不可欠である。学生諸君が一人でも多く、データ解析の知識と技術を身につけ、社会に貢献してほしいと願っているのは筆者だけではない。

本稿の執筆にあたり、統計数理研究所の石黒真木夫氏、本学部の田中、江原、伊東、石鎚、齊藤諸先生方から貴重な助言と情報をいただいた。また、情報科学センターの支援を受けた。ここに感謝の気持ちを記す。（佐藤）

参考文献

- [1] 永添めぐみ, 村上明日香, 佐藤 創, 「数量化理論Ⅰ類の解説とその適用例」, ネットワーク & インフォメーション No. 11, 専修大学ネットワーク情報学部, 2006.
- [2] 竹内 啓, 柳井晴夫, 「多変量解析の基礎」, 東洋経済新報社, 1972.
- [3] 奥野忠一ほか, 「多変量解析法」, 日科技連, 1985.
- [4] 田中 豊, 垂水共之, 脇本和昌, 「パソコン統計解析ハンドブックⅡ, 多変量解析編」, 共立出版, 1986.
- [5] 小林道正, 小林厚子, 「Mathematica による多変量解析」, 現代数学社, 1996.
- [6] 柳井晴夫, 緒方裕光, 「SPSS による統計データ解析」, 現代数学社, 2006.
- [7] 田栗正章, 藤越康祝, 柳井晴夫, C.R. ラオ, 「やさしい統計入門」, ブルーバックス, 講談社, 2007.
- [8] 山田剛史, 杉澤武俊, 村井潤一郎, 「R によるやさしい統計学」, オーム社, 2008.